مجلة القادسية لعلوم الحاسوب والرياضيات المجلد(6) العدد(1)
السنة(2014)

((طريقة AMT لحساب التكاملات الثنائية المستمرة عدديا))

م.م.وفاء هادي حنون

جامعة الكوفة –كلية التربية للبنات – قسم الحاسبات

المستخلص:-

إستعملنا في بحثنا هذا طريقة لحساب قيم تقريبية للتكاملات الثنائية والتي مكاملاتها مستمرة بإستخدام القاعدتين شبه المنحرف والنقطة الوسطى لان القيم التقريبية الناتجة من قاعدة شبه المنحرف تكون سريعة في الإقتراب إلى القيم الحقيقية للتكاملات مقارنة بصيغ نيوتن- كوتس الأخرى .ساستري[5] وكانداسمي [4]أما بالنسبة لقاعدة النقطة الوسطى لإمكانية استخدامها في حساب التكاملات المستمرة أوغير المستمرة في منطقة التكامل إذ أنها لاتستخدم قيم دالة التكامل في نهايتي فترة التكام ـل ورمز هذه الطريقة هو MT . حيث $2n$ (عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[a,b]$) مساوية إلى $2m$ (عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[c,d]$) آذ أن $\left(h=\bar{h}\right)$ وقد قمنا بتعجيل تقارب النتائج الى القيم الحقيقية للتكاملات بتطبيق تعجيل ايتكن على القاعدة المركبة MT لنحصل على قاعدة جديدة أسميناها AMT حيث ان الرمز A يشير الى طريقة تعجيل ايتكن والرمز MT (قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي y وقاعدة شبه المنحرف على البعد الداخلي x).

1- المقدمة:-

كما هو الحال في التكامل المحدد لدالة موجبة في متغير واحد الذي يمثل مساحة المنطقة الواقعة بين منحني الدالة والمحور السيني,كذالك فإن التكامل الثنائي لدالة موجبة في متغيرين يمثل حجم المنطقة الفاصلة بين السطح المعرف بالدالة (في النظام الديكارتي ثلاثي الأبعاد حيث ($f=(x,y)$)والمستوي المحتوي لمجاله .
إن إيجاد قيم التكاملات الثنائية ليس بالأمر السهل إلا في حالات قليلة كون المكامل هنا يعتمد على متغيرين ولأننا سنتعامل هنا مع مناطق التكامل (Regions) أو سطوح (Surfaces) وليس مع فترات تكامل كما في حالة التكامل الأحادي لذا أصبحت الحاجة ملحة لإيجاد قيم تقريبية لهذه التكاملات و تكمن أهمية التكاملات الثنائية في حساب الكتلة (Mass) وعزم ومركز الكتلة Moment and centers of Mass وحساب عزم القصور الذاتيMoment of inertia.

مما دعا كثير من الباحثين إلى العمل في مجال التكاملات الثنائية ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على حساب التكاملات ذات المكاملات المستمرة بالصيغة $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ هما هانس جار وجاكوبسن [2] عام 197 ومنهم من درس التكاملات ذات المكاملات المعتلة لكنهم كانوا يهملون الإعتلال , دافييز ورابينوتز [3] عام 1975 .

وفي عام 2010 إستخدمة عكار [6] أسلوب جديد إذ قدمت طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثنائية وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على البعدين x و y عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل الخارجي إذ إن

$h=\bar{h}$ وأسمتها RMM حيث أن MM ترمز لقاعدة النقطة الوسطى المطبقة على كلا البعدين و R طريقة تعجيل وقد حصلت على نتائج جيدة وبعدد قليل من الفترات الجزئية المستخدمة .

ولقد أضافت الباحثة ناصر[9] عام 2011 ست طرائق لحساب التكاملات الثنائية عدديا حيث إن هذه الطرائق مركبة من تعجيلي أيتكن و رومبرك مع قاعدتي النقطة الوسطى وسمبسون وهي $AMAM$ و $AMRM$ و $ASAS$ و $ASRS$ و $RSAS$ و AMM وقد أعطت نتائج جيدة عند تطبيقها على التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المستخدمة والوقت المستغرق في الوصول الى القيمة التحليلية. في بحثنا هذا طبقنا تعجيل ايتكن على كل ثلاث قيم ناتجة من تطبيق القاعدة MT لحساب قيم تقريبية للتكاملات الثنائية والتي مكاملاتها مستمرة عندما $2n$ (عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[a,b]$) مساوية إلى $2m$ (عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[c,d]$) وحصلنا على قاعدة جديدة أسميناها AMT وهذه القاعدة تعطي نتائج أسرع في الوصول للقيمة التحليلية من القاعدة MT عند تطبيقها على التكاملات المستمرة.

2- طريقة MT :

نفرض إن التكامل الثنائي I معرف كالآتي :

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy \qquad \dots (1)$$

حيث أن $f(x,y)$ مكامل مستمر في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$.

بشكل عام يمكن كتابة التكامل I بالشكل الأتي :

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=GG(h) \qquad \dots(1)$$

حيث إن $GG(h)$ تمثل قيمة التكامل عددياً باستخدام الصيغة MT , و $h=\frac{(b-a)}{n}=\frac{(d-c)}{m}$

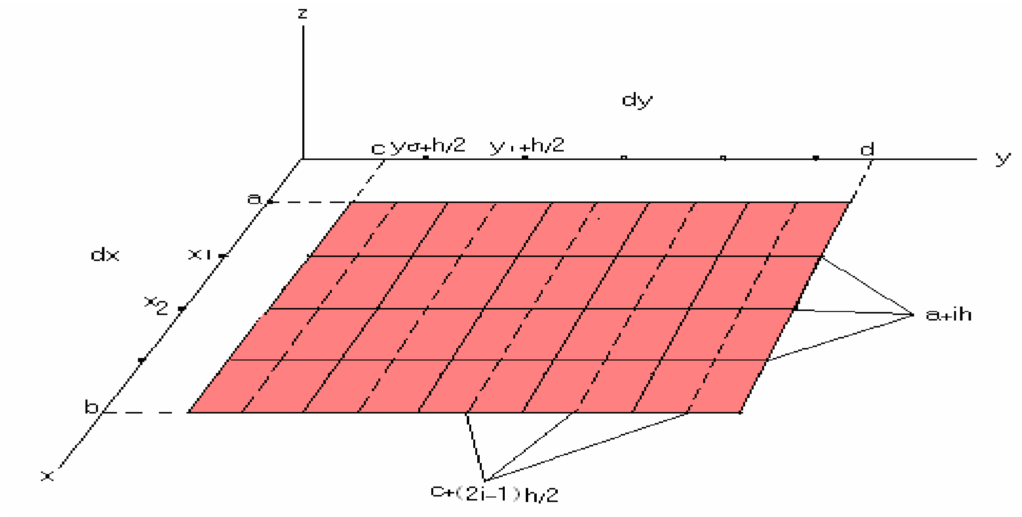
(سنختار $m=n$ لان النتائج أفضل وأسرع في الوصول إلى القيم الحقيقية .ناصر [9] وعكار [6])

يمكن الحصول على صيغة هذه الطريقة MT من خلال تطبيق قاعدة شبه المنحرف على البعد الداخلي وقاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي عندما $m=n$ (n عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[a,b]$ و m عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[c,d]$ أي إن $(\bar{h}=h)$.حيث ان $h=\frac{b-a}{n},\ \bar{h}=\frac{d-c}{m},$

$$MT = \frac{h^2}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(f(a, y_j + \tfrac{h}{2}) + f(b, y_j + \tfrac{h}{2}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, y_j + \tfrac{h}{2})\right)$$

إذ أن:- $(i=1,2,3,\cdots n-1\ ,\ x_i = a+ih)$, $(j = 0,1,2,\cdots,n-1\ ,\ y_j = c+jh)$

محمد [8]



شكل (1)

تمثيل هندسي يبين منطقة التكامل , وتجزئة فترتي التكامل على البعدين حسب قاعدة MT

. فعندما نبدأ بوضع $n = m = 2$ في الصيغة في أعلاه فإننا نحسب القيمة التقريبية للتكامل الثنائي I ونثبت في جداولنا هذه القيمة التقريبية. ثم نضع $m = n = 4$ و نحسب MT وأيضا نثبت هذه القيمة في جداولنا على إنها القيمة التقريبية للتكامل الثنائي وبنفس الإسلوب نحسب القيمة التقريبية للتكامل الثنائي عندما $m = n = 8$. وهكذا ويمكن الحصول على قيمة أفضل باستخدام كل ثلاث قيم من القاعدة MT بتطبيق طريقة تعجيل أيتكن عليهما نحصل على قيمة للتكامل الثنائي بطريقة تعجيل ايتكن مع قاعدة MT .

3- طريقة أيتكن دلتا التربيعية Aitken's delta – Squared Process

وجد الكسندر ايتكن عملية لتعجيل نسبة التقارب لسلسلة وأسماها طريقة ايتكن دلتا التربيعية وهي تتألف من بناء سلسلة جديدة $s^{(1)}$ والتي مجموعها الجزئي $s_i^{(1)}$ وهو معطى بالقانون الآتي : رالستون [1]

$$s_i^{(1)} = s_{i+1} - \frac{\left(s_{i+1} - s_i\right)^2}{s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1}} = \frac{s_{i-1}s_{i+1} - s_i^{\,2}}{s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1}} \quad \ldots(2)$$

حيث تعتبر (s_{n-1}, s_n, s_{n+1}) ثلاث مجاميع جزئية ناجحة للسلسلة الأصلية ومن الممكن بالتأكيد تكرار هذه العملية على السلسلة الجديدة $s^{(1)}$ للحصول على $s^{(2)}$.ناصر [9] , محمد وناصر [7].

وسنطبقها على القاعدة MT وذلك لتعجيل الحصول على قيم أفضل للتكاملات بدلا من الاستمرار في زيادة عدد الفترات الجزئية فإذا كان لدينا على سبيل المثال n قيمة بقاعدة MT فسوف نحصل على $n-2$ قيمة بطريقة تعجيل ايتكن باستخدام المعادلة (2) ثم نستخدم أيضا تعجيل ايتكن على القيم $n-2$ فنحصل على $n-4$ قيمة وهكذا نستمر إلى أن نحصل على الدقة المطلوبة.

4-الأمثلة :- إن مكامل التكامل $\int_3^4\int_2^3 xy\,\ln(x+y)\,dx\,dy$ معرف لكل $(x,y)\in[2,3]\times[3,4]$ وقيمته التحليلية هي15.74097731 مقربة لثمان مراتب عشرية.

AMT	AMT	MT	$m=n$
		15.79357975	1
		15.75411299	2
	15.74098227	15.74426029	4
	15.74097762	15.74179800	8
15.74097731	15.74097733	15.74118248	16

الجدول (1) حساب التكامل الثنائي $\int_3^4\int_2^3 xy\,\ln(x+y)\,dx\,dy$ باستعمال طريقة AMT

نستنتج من الجدول (1) عندما $n=m=16$ فان القيمة بقاعدة MT تكون صحيحة لثلاث مراتب عشرية فقط وباستخدام طريقة تعجيل أيتكن مع القاعدة المشار أليها حصلنا على قيمة صحيحة لثمان مراتب عشرية(مطابقة للقيمة التحليلية) بإستخدام (2^8 فترة جزئية) وكان الوقت المستغرق لحساب التكامل هو0.000003 ثانية.

وفاء هادي

ولحساب التكامل الثنائي $I=\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y)}dxdy$ عددياً نلاحظ إن المكامل معَرف لكل $(x,y)\in[0,1]\times[1,2]$ وقيمته التحليلية هي 0.061447728 مقربة لتسع مراتب عشرية .

AMT	AMT	AMT	MT	$m=n$
			0.041042499	1
			0.056062532	2
		0.061552197	0.060082823	4
		0.061454085	0.061105325	8
	0.061447737	0.061448123	0.061362054	16
	0.061447728	0.061447753	0.061426305	32
0.061447728	0.061447728	0.061447730	0.061442372	64

الجدول (2) حساب التكامل الثنائي $I=\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y)}dxdy$ باستعمال طريقة AMT

نلاحظ من الجدول (2) عندما $n=m=64$ فان القيمة باستخدام قاعدة MT تكون صحيحة لخمس مراتب عشرية وباستخدام طريقة تعجيل أيتكن مع القاعدة المشار إليها حصلنا على قيمة صحيحة لتسع مراتب عشرية (مطابقة للقيمة التحليلية) عندما $n=m=64$ أي بـ (2^{12} فترة جزئية) .وكان الوقت المستغرق لحساب التكامل هو 0.000004 ثانية.

كذلك مكامل التكامل الثنائي $\int_1^2\int_1^2 \ln(x+y)dxdy$ معَرف لكل $(x,y)\in[1,2]\times[1,2]$ وقيمتة التحليلية هي 1.089138652 مقربة لتسع مراتب عشرية .

AMT	AMT	MT	$m=n$
		1.084526850	1
		1.087931723	2
	1.089157827	1.088833201	4
	1.089139912	1.089062051	8
1.089138649	1.089138732	1.089119487	16
1.089138652	1.089138657	1.089133860	32

الجدول (3) حساب التكامل الثنائي $\int_1^2\int_1^2 \ln(x+y)dxdy$ باستعمال طريقة AMT

نلاحظ من الجدول (3) عندما $n=m=32$ فان القيمة باستخدام قاعدة MS تكون صحيحة لخمس مراتب عشرية وباستخدام طريقة تعجيل أيتكن مع القاعدة MS حصلنا على قيمة (مطابقة للقيمة التحليلية) صحيحة لتسع مراتب عشرية بـ (2^{10} فترة جزئية) وكان الوقت المستغرق لحساب التكامل هو 0.000004 ثانية. .

وأيضا مكامل التكامل $I=\int_0^1\int_0^1 x\sin(\frac{\pi}{2}(x+y-1))dxdy$ معرف لكل $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$

وإن قيمته التحليلية 0.1107398164 مقربة لعشر مراتب عشرية والجدول (4) يوضح النتائج .

AMT	AMT	AMT	MT	$m=n$
			0.3535533906	1
			0.1633203706	2
		0.1128556705	0.1234361029	4
		0.1108804811	0.1138866590	8
	0.1107393409	0.1107487537	0.1115248378	16
	0.1107398085	0.1107403773	0.1109359663	32
0.1107398164	0.1107398162	0.1107398515	0.1107888473	64

الجدول (4) حساب التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1 x\sin(\frac{\pi}{2}(x+y-1))dxdy$ باستعمال طريقة AMT

يتبين من الجدول (4) ان القيمة العددية للتكامل أعلاه عندما $n=m=64$ تكون صحيحة لأربع مراتب عشرية فقط بإستخدام طريقة MT و بتطبيق طريقة AMT على القيم الناتجة حصلنا على قيمة صحيحة لعشر مراتب عشرية (مطابق للقيمة التحليلية)بإستخدام(2^{12} فترة جزئية) وكان الوقت المستغرق لحساب التكامل هو0.000004 ثانية. .

إن التكامل الثنائي $\int_1^2\int_1^2 \ln(xy)dxdy$ معَرف لكل $(x,y)\in[1,2]\times[1,2]$ وقيمتة التحليلية هي 0.772588722 مقربة لتسع مراتب عشرية ودونا نتائج الطريقة AMT في الجدول (5).

AMT	AMT	MT	$m=n$
		0.752038698	1
		0.767399019	2
	0.772606109	0.771287820	4
	0.772589881	0.772263275	8
0.772588718	0.772588796	0.772507347	16
0.772588722	0.772588727	0.772568377	32

الجدول (5) حساب التكامل الثنائي $\int_1^2\int_1^2 \ln(xy)dxdy$ باستعمال طريقة AMT

واضح من الجدول (5) ان القيمة التقريبية للتكامل أعلاه تكون صحيحة لأربع مراتب عشرية عندما $n=m=32$ بطريقة MT بينما عند تطبيق طريقة AMT تكون القيمة مطابقة للقيمة التحليلية مقربة لتسع مراتب عشرية لنفس الفترة الجزئية أي بإستعمال (2^{10} فترة جزئية) وكان الوقت المستغرق لحساب التكامل هو0.000003 ثانية. .

5-المناقشة :-

مما ورد في الجداول يتضح ان تطبيق قاعدة MT والناتجة من تطبيق(قاعدة شبه المنحرف على البعد الداخلي وقاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي)على التكاملات المستمرة يعطي قيم تقريبية صحيحة لأربع أو خمس مراتب عشرية عندما $m=n$ (n عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[a,b]$ و m عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[c,d]$ أي إن $(\bar{h}=h)$ وقد استطعنا تسريع النتائج بتطبيق طريقة تعجيل آيتكن على القيم الناتجة والحصول على قيم عددية مطابقة للقيمة التحليلية باستخدام فترات جزئية قليلة نسبيا وبوقت قصير حيث تم احتساب النتائج والوقت المستغرق من خلال البرنامج المصمم بلغة الماتلاب .

المصادر

[1] Anthony Ralston " A First Course in Numerical Analysis " Mc Grow – Hill Book company 1965 , pp-87-94 , 114-133 , 347.

[2] Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- and Two-Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , the Technical University of Denmark Lyngby , pp. 1-12 ,1973 .

[3] Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , BLASDELL Puplishing Company , pp. 1-2 , 599,113 , chapter 5 , 1975 .

[4] P.Kandasamy, " Numerical Methods",pp . 299-321 , chapter 8 ,2004.

[5] **S.S. Sastry** , " Introductory Methods of Numerical Analysis" ,pp. 197-211, chapter 5 ,**2008.**

[6] عكار , بتول حاتم , "بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية " , رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ,2010.

[7] محمد , علي حسن ,و ناصر ,رسل حسن , " حساب تكاملات أحاديه ذات مكاملات مستمرة ومعتلة المشتقة و معتلة بأستخدام الطريقة التعجيليه ايتكن على صيغ نيوتن– كوتس " , مجلة جامعة كربلاء ,العدد الرابع ,2011 .

[8] محمد , ندى أحمد, "اشتقاق طرائق مركبة من قاعدتي شبه المنحرف والنقطة الوسطى لحساب التكاملات الثنائية عدديا و صيغ الخطأ لها و تحسين النتائج باستعمال طرائق تعجيلية" , رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ,2012

[9] ناصر , رسل حسن, " المقارنة بين الطريقتين التعجيليتين ايتكن ورومبرك في حساب التكاملات عدديا " , رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ,2011 .

((AMT Method to Evaluate the Double Integrals with Continuous Integrands Numerically))

Assis. Lecturer. Wafaa Hadi Hanoon
University of Kufa - College of Education for Girls - Department of Computers

Recived :8\1\2014 Recived :16\3\2014 Accepted :17\4\2014

Abstract

In this paper ,we used search method for calculating the approximate values of double integrals , when its integrands continuous and we choose rules (Trapezoidal and mid-point)because the approximate values resulting from the use of Trapezoidal rule be faster closer to the real value of the integrals compared to another formulas of Newton-Cotes formulas ,but for the rule mid-point we can use it in the calculation of continuous integrand or non-continuous integrands in the region of integration because it is not use the values of function of integration in both ends of the integration period and the symbol of this rule is MT **.**We choose $2n$ **(** the number of subintervals of $[a,b]$)is equal to $2m$ (number of subintervals of $[c,d]$)and we improved the results by applying Aitken accelerate with MT and denote to the method by AMT , where the symbol A indicates to the Aitken's acceleration method and MT (indicates to the mid-point rule on the external dimension and Trapezoidal rule on the internal dimension).