مجلة القادسية لعلوم الحاسوب والرياضيات المجلد(5) العدد(2)
السنة(2013)

صفحة1-13

أشتقاق طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثيةوصيغة الخطأ لها بأستخدام قاعدة شبه المنحرف وقاعدة النقطةالوسطى

أ.علي حسن محمد
جامعة الكوفة /كلية التربية للبنات/قسم الرياضيات
باحث.رنا حسن هلال عبد الله
جامعة الكوفة /كليةالتربيةللبنات/قسم الرياضيات

Abstract

Our main aim of this research is to derive new rule for evaluating triple integrals with continuous integrands by using trapezoidal and mid point rules and to derive correction terms (error formula) and to improve the results by using Romberg acceleration .we showed that the composite method from Romberg acceleration and the values yielded from mid point method at the exterior dimension(z) and trapezoidal method at the middle and interior dimension y and x when the number of subintervals of exterior dimension equl to the number of subintervals of middle dimension and equl to the number of subintervals of interior dimension,that is $\left(h = \bar{h} = \bar{\bar{h}}\right)$,where as h is the distances on z ordinates, $\bar{h}$ is the distances on y ordinates on y and $\bar{\bar{h}}$ is the distances on x ordinates which we called it RMTT we can depend on it to evaluate triple integrals when the integrands are continuos and it gave high accuracy with little subinterrals

1.المقدمة

يتميز موضوع التحليل العددي في ابتكار طرائق متنوعة لإيجاد حلول تقريبية لمسائل رياضياتية معينة بأسلوب فعال . تعتمد كفاءة هذه الطرائق على كل من الدقة والسهولة التي يمكن بها أن تنفذ. فالتحليل العددي الحديث هو الواجهة العددية للمجال الواسع للتحليل التطبيقي . وبما أن للتكاملات الثلاثية أهمية في إيجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم على سبيل المثال الحجم الواقع داخل $x^2 + y^2 = 4x$ وفوق $z = 0$

وتحت $x^2+y^2=4z$ وحساب المركز المتوسط للحجم الوقع داخل $x^2+y^2=9$ وفوق المستوي $z=0$ وتحت المستوي $x+z=4$ وكذلك إيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيع أو صفيحة رقيقة من المعدن.فرانك آيرز [7],[4] لذلك عمل عدد من الباحثين في مجال التكاملات الثلاثية .

في عام 2009 استخدمت ضياء [6] طرائق التكامل الأحادي لتكوين طرائق لحساب التكامل الثلاثي و هي $RMRM\,(RS)$ ، $RMRM\,(RM)$ ، $RMRS\,(RM)$ و $RMRS\,(RS)$ وهذه الطرائق ناتجة من $RM\,(RS)$ ، $RM\,(RM)$ $RS\,(RM)$ ، على البعد الأوسط (y) والبعد الداخلي (x) ومن طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى (RM) على البعد الخارجي (البعد z) وقد توصلت إلى إن الطريقة المركبة $RMRS\,(RS)$ هي الأفضل عند حساب التكاملات الثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب الى القيمة الحقيقية للتكاملات .

وفي عام 2010 قدمت عكار [5] طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية وذلك باستعمال طريقة $RMMM$ الناتجة من تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى المطبقة على الأبعاد x و y و z عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وحصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب للقيم الحقيقية وبفترات جزئية قليلة نسبياً.

أما في هذا البحث نقدم مبرهنة مع البرهان لاشتقاق قاعدة جديدة لحساب قيم تقريبية للتكاملات الثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة وصيغة الخطأ لها وهذه القاعدة ناتجة عن تطبيق طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من استعمال قاعدتي النقطة الوسطى على البعد الخارجي z وقاعدة شبه المنحرف على البعدين الأوسط والداخلي y و x عندما $m=n_1=n_2$) n_2 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي $[a,b]$ و n_1 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط $[c,d]$ و m عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي $[e,g]$) وسنرمز لهذه الطريقة بالرمز $RMTT$ حيث R طريقة تعجيل رومبرك و MTT القاعدة المشتقة وقد حصلنا على نتائج جيدة من حيث الدقةو سرعة الاقتراب الى القيمة الحقيقية وبعدد فترات جزئية قليل نسبياً.

2. حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عددياً

مبرهنة :-

لتكن الدالة $f(x,y,z)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ والقيمة

$$I=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)$$

يمكن حسابها من القاعدة الآتية: التقريبية للتكامل

$$MTT=\frac{h^3}{4}\sum_{K=0}^{n-1}\ [f(a,c,z_k+.5h)+f(a,d,z_k+.5h)+f(b,c,z_k+.5h)$$

$$+f(b,d,z_k+.5h)+2\sum_{i=1}^{n-1}(f(a,y_i,z_k+.5h)+f(b,y_i,z_k+.5h)+f(x_i,c,z_k+.5h))+$$

$$+f(x_i,c,z_k+.5h)+f(x_i,d,z_k+.5h)+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(x_i,y_j,z_k+.5h)]$$

وأن صيغة الخطأ هي $E_{MTT}(h)=I-MTT(h)=A_{MTT}h^2+B_{MTT}h^4+C_{MTT}h^6+\cdots$

حيث $A_{MTT},B_{MTT},C_{MTT},...$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة f ولا تعتمد على h فقط .

وأن $i=1,2,\cdots n-1 \quad x_i=a+ih$

$j=1,2,\cdots n-1 \quad y_j=c+jh \qquad k=1,2,\cdots n-1 \quad z_k=e+kh$

***البرهان*_**

بشكل عام بالصورة الآتية : I يمكن كتابة التكامل الثلاثي

$$I=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz=MTT(h)+E_{MTT}(h) \tag{1}$$

إذ إن $MTT(h)$ هي قيمة التكامل عددياً باستخدام قاعدتي النقطة الوسطى على البعد z وشبه المنحرف على البعدين x و y وان $E_{MTT}(h)$ هي سلسلة حدود التصحيح الممكن إضافتها إلى قيم $MTT(h)$ وان ،

بفرض إن $h=\dfrac{b-a}{n_1}=\dfrac{d-c}{n_2}=\dfrac{g-e}{m}$. $n_1=n_2=m$

أن صيغة الخطأ للتكاملات الأحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة النقطة الوسطى هي :

$$E_M(h)=\frac{1}{6}h^2(f_n'-f_0')-\frac{7}{360}h^4(f_n^{(3)}-f_0^{(3)})+\frac{31}{15120}h^6(f_n^{(5)}-f_0^{(5)})-\cdots \tag{2}$$

اماأستخدام قاعدة شبه المنحرف هي:

$$E_T(h) = -\frac{1}{12}h^2(f_n^{(1)} - f_0^{(1)}) + \frac{1}{720}h^4(f_n^{(3)} - f_0^{(3)}) - \cdots \qquad (3)$$

فوكس[1],[2]

)و 2 للصيغتين (Mean−value theorem for derivativesوباستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل

) نحصل على : 3(

$$E_M(h) = \frac{(x_n - x_0)}{6}h^2 f^{(2)}(\eta_1) - \frac{7(x_n - x_0)}{360}h^4 f^{(4)}(\eta_2) + \frac{31(x_n - x_0)}{15120}h^6 f^{(6)}(\eta_3) - \ldots \qquad (4)$$

$$E_T(h) = \frac{-(x_n - x_0)}{12}h^2 f^{(2)}(\mu_1) + \frac{(x_n - x_0)}{1512}h^4 f^{(4)}(\mu_2) + \ldots \qquad (5)$$

حيث$i = 1,2,3,\cdots$ $\mu_i, \eta_i \in (x_0, x_n)$ عكار. [5]

$a = x_0 \quad b = x_n, \quad c = y_0 \quad d = y_{n_1}, \quad e = z_0 \quad g = z_m$.

و(التعامل مع x يمكن حسابه عددياً بقاعدة شبه المنحرف على البعد $\int_a^b f(x,y,z)dx$ فبالنسبة للتكامل الداخلي

كثوابت) من الصيغة :− z, y

$$T = \int_a^b f(x,y,z)dx = \frac{h}{2}\left(f(a,y,z) + f(b,y,z) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,y)\right) - \frac{(b-a)}{12}h^2\frac{\partial^2 f(\mu_1,y,z)}{\partial x^2} + \frac{(b-a)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(\mu_2,y,z)}{\partial x^4} - \frac{(b-a)}{30240}h^6\frac{\partial^6 f(\mu_3,y,z)}{\partial x^6} + \cdots \qquad (6)$$

كثابت)ايضا بقاعدة شبه z و(التعامل مع y بالنسبة الى(6).وبمكاملة الصيغة $(a,b$ حيث ان$\mu_1,\mu_2,\mu_3,\cdots \in$

المنحرف نحصل على

$$\begin{aligned}TT = {} & \frac{h^2}{4}[f(a,c,z) + f(a,d,z) + f(b,d,z) + f(b,c,z) + 2\sum_{j=1}^{n-1}(f(a,y_j,z) + f(b,y_j,z)) + \\ & 2\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_i,c,z) + f(x_i,d,z) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i,y_j,z))] + \int_c^d [\frac{b-a}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(\mu_1,y,z)}{\partial x^2} + \frac{b-a}{720}h^4\frac{\partial^4 f(\mu_2,y,z)}{\partial x^4} + \cdots]dy + \\ & \frac{h}{2}[\frac{d-c}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(a,\lambda_{11},z)}{\partial y^2} + \frac{d-c}{720}h^4\frac{\partial^4 f(a,\lambda_{12},z)}{\partial y^4} + \cdots + \frac{d-c}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(b,\lambda_{21},z)}{\partial y^2} + \frac{d-c}{720}h^4\frac{\partial^4 f(b,\lambda_{22},z)}{\partial y^4} + \cdots \\ & h\sum_{i=1}^{n-1}(\frac{d-c}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_i,\lambda_{2i},z)}{\partial y^2} + \frac{d-c}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_i,\lambda_{2i+1},z)}{\partial y^4} + \cdots)]\end{aligned} \qquad (7)$$

حيث$\lambda_{kl} \in (c,d)$ وان $k = 1,2,3,\cdots,n+1$ $\qquad l = 1,2,3,\cdots$

الوسطى نحصل على الاتي:− بأستخدام قاعدة النقطة $[e,g]$ في الفترة zبالنسبة الى(7)وبمكاملة طرفي المعادلة

$$MTT=\frac{h^3}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\ [f(a,c,z_k+.5h)+f(a,d,z_k+.5h)+f(b,d,z_k+.5h)+f(b,c,z_k+.5h)$$
$$+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(a,y_j,z_k+.5h)+f(b,y_j,z_k+.5h))+2\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_i,c,z)+f(x_i,d,z)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_i,y_j,z))]+$$
$$\int_e^g\int_c^d[\frac{b-a}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(\mu_1,y,z)}{\partial x^2}+\frac{b-a}{720}h^4\frac{\partial^4 f(\mu_2,y,z)}{\partial x^4}+\cdots]dydz+\frac{h}{2}\int_e^g\ [\frac{d-c}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(a,\lambda_{11},z)}{\partial y^2}+$$
$$\frac{d-c}{720}h^4\frac{\partial^4 f(a,\lambda_{12},z)}{\partial y^4}+\cdots+\frac{d-c}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(b,\lambda_{21},z)}{\partial y^2}+\frac{d-c}{720}h^4\frac{\partial^4 f(b,\lambda_{22},z)}{\partial y^4}+\cdots$$
$$2\sum_{i=1}^{n-1}(\frac{d-c}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_i,\lambda_{2i+1},z)}{\partial y^2}+\frac{d-c}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_i,\lambda_{2i+2},z)}{\partial y^4}+\cdots)]dz+$$
$$\frac{h^2}{4}\sum_{k=0}^{n-1}[\frac{(g-e)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(a,c,\theta_{111})}{\partial z^2}-\frac{7(g-e)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(a,c,\theta_{112})}{\partial z^4}+\cdots+$$
$$\frac{(g-e)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(a,d,\theta_{121})}{\partial z^2}-\frac{7(g-e)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(a,d,\theta_{122})}{\partial z^4}+\cdots+$$
$$\frac{(g-e)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(b,c,\theta_{131})}{\partial z^2}-\frac{7(g-e)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(b,c,\theta_{132})}{\partial z^4}+\cdots+$$
$$\frac{(g-e)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(b,d,\theta_{141})}{\partial z^2}-\frac{7(g-e)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(b,d,\theta_{142})}{\partial z^4}+\cdots+$$
$$2\sum_{i=1}^{n-1}(\frac{(g-e)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(a,y_i,\theta_{211})}{\partial z^2}-\frac{7(g-e)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(a,y_i,\theta_{212})}{\partial z^4}+\cdots+$$
$$\frac{(g-e)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(b,y_i,\theta_{221})}{\partial z^2}-\frac{7(g-e)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(a,c,\theta_{222})}{\partial z^4}+\cdots+$$
$$\frac{(g-e)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_i,c,\theta_{321})}{\partial z^2}-\frac{7(g-e)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_i,c,\theta_{322})}{\partial z^4}+\cdots+$$
$$\frac{(g-e)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_i,d,\theta_{421})}{\partial z^2}-\frac{7(g-e)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_i,d,\theta_{422})}{\partial z^4}+\cdots+$$
$$2\sum_{j=1}^{n-1}(\frac{(g-e)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_i,y_j,\theta_{1+ijk})}{\partial z^2}-\frac{7(g-e)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_i,y_j,\theta_{2+ijk})}{\partial z^4}+\cdots] \quad (8$$

وأن (e,f) قيم تنتمي الى الفترة θ_{ijk} حيث ان

$i=1,2,3,\ldots$

$j=1,2,3,\ldots$

$k=1,2,3,\ldots$

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على (8)– نحصل على الاتي:

$$MTT = \frac{h^2}{4}\sum_{k=0}^{n-1} [\, f(a,c,z_k+.5h) + f(a,d,z_k+.5h) + f(b,d,z_k+.5h) +$$
$$f(b,c,z_k+.5h) + 2\sum_{j=1}^{n-1}(\, f(a,y_j,z_k+.5h) + f(b,y_j,z_k+.5h)) +$$
$$2\sum_{i=1}^{n-1}(\, f(x_i,c,z) + f(x_i,d,z) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i,y_j,z))] +$$
$$h^2[\frac{(b-a)(d-c)(g-e)}{-12}\frac{\partial^2 f(\mu_1,\gamma_1,\alpha_1)}{\partial x^2} +$$
$$\frac{(d-c)(g-e)}{-12}\frac{h}{2}(\frac{\partial^2 f(a,\lambda_{11},\overline{\alpha_1})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(b,\lambda_{21},\overline{\overline{\alpha_1}})}{\partial y^2} +$$
$$\frac{\partial^2 f(b,d,\theta_{141})}{\partial z^2} + 2\sum_{i=1}^{n-1}(\frac{\partial^2 f(a,y_i,\theta_{211})}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f(b,y_i,\theta_{221})}{\partial z^2} +$$
$$\frac{\partial^2 f(x_i,c,\theta_{321})}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f(x_i,d,\theta_{421})}{\partial z^2} + 2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f(x_i,y_j,\theta_{511})}{\partial z^2})] +$$
$$h^4[\frac{(b-a)(d-c)(g-e)}{720}\frac{\partial^4 f(\mu_2,\gamma_2,\alpha_2)}{\partial x^4} +$$
$$\frac{(d-c)(g-e)}{720}\frac{h}{2}(\frac{\partial^4 f(a,\lambda_{12},\overline{\alpha_2})}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f(b,\lambda_{22},\overline{\overline{\alpha_2}})}{\partial y^4} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^4 f(x_i,\lambda_{2+i1},\eta_2)}{\partial y^4} +$$
$$\frac{h^2}{4}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{(g-e)}{6}(\frac{\partial^4 f(a,c,\theta_{112})}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 f(a,d,\theta_{121})}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 f(b,c,\theta_{132})}{\partial z^4}$$
$$+\frac{\partial^4 f(x_i,c,\theta_{322})}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 f(x_i,d,\theta_{422})}{\partial z^4} + 2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^4 f(x_i,y_j,\theta_{512})}{\partial z^4})] + h^6[\ldots]$$

حيث ان $\alpha_i,\overline{\overline{\alpha_i}},\overline{\alpha_i},\eta_i,\ldots$ ثوابت تنتمي للفترة (e,g)

$$MTT = \frac{h^2}{4}\sum_{k=0}^{n-1} [\, f(a,c,z_k+.5h) + f(a,d,z_k+.5h) + f(b,d,z_k+.5h) + f(b,c,z_k+.5h)$$
$$+2\sum_{j=1}^{n-1}(\, f(a,y_j,z_k+.5h) + f(b,y_j,z_k+.5h)) + 2\sum_{i=1}^{n-1}(\, f(x_i,c,z) + f(x_i,d,z) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i,y_j,z))] +$$
$$A_{MTT}h^2 + B_{MTT}h^4 + \cdots \qquad (9)$$

حيث ان $A_{MTT},B_{MTT},C_{MTT},\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقا ت الجزئية للدالة f ولاتعتمد على h

3. الأمثلة

1. $\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \log(x+y+z)dxdydz$ إذ إن قيمته الحقيقية هي 1.4978022885754 (مقربة إلى ثلاث عشر مرتبة عشرية).

2. $\int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}dxdydz$ هي. إذ إن قيمته الحقيقية 0.0052567434550 (مقربة إلى ثلاث عشر مرتبة عشرية).

4. النتائج :-

إن التكامل $\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \log(x+y+z)dxdydz$ ذات مكامل معرف لكل $(x,y,z)\in[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (9) وباستعمال طريقة $RMTT$ حصلنا على النتائج المدونة في جدول(1) وهي كالأتي :-

N	MTT	K=2	K=4	K=6	K=8
1	1.4914164635716				
2	1.4962003263722	1.4977949473057			
4	1.4974014816711	1.4978018667707	1.4978023280684		
8	1.4977020675944	1.4978022629022	1.4978022893110	1.4978022886958	
16	1.4977772321352	1.4978022869821	1.4978022885874	1.4978022885759	1.4978022885755

الجدول (1) حساب التكامل الثلاثي $I=\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \ln(x+y+z)dxdydz=1.4978022885754$

نلاحظ من الجدول انه عندما $n_1=n_2=m=16$ ان قيمة التكامل باستخدام قاعدة MTT تكون صحيحة لثلاث مراتب عشرية وعند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لاثنتي عشر مرتبة عشرية)و وبـ (2^{12}فترة جزئية).

وكذلك التكامل $\int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}dxdydz$ ذات مكامل معرف لكل $(x,y,z)\in[0,1]\times[1,2]\times[2,3]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح لهذا التكامل تكون مماثلة للصيغة(9)و الجدول (2) يبين حساب التكامل أعلاه عددياً باستعمال الطريقة $RMTT$

N	MTT	K=2	K=4	K=6
1	0.0037989419942			
2	0.0048955533470	0.0052610904646		
4	0.0051667211075	0.0052571103610	0.0052568450207	
8	0.0052342562679	0.0052567679880	0.0052567451631	0.0052567435781
16	0.0052511228273	0.0052567450138	0.0052567434822	0.0052567434555

الجدول (2) حساب التكامل الثلاثي

$$I = \int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}dxdydz = 0.005256743455$$

نلاحظ من الجدول انه عندما $n_1 = n_2 = m = 16$ ان قيمة التكامل باستخدام قاعدة MTT تكون صحيحة لخمس مراتب عشرية وعند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية مقربة الى ثلاثة عشر مرتبة عشرية وبـ (2^{12})فترةجزئية

المناقشة

إن (MTT) نستنتج من خلال نتائج وجداول هذا البحث انه عند حساب التكاملات الثلاثية بالقاعدة المذكورة هذه القاعدة تعطي قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات باستعمال عدد من الفترات الطريقة التعجيلية على سبيل المثال ،في التكامل الأول حصلنا على قيمة صحيحة لثلاث الجزئية بدون استعمال وفي التكامل الثاني حصلنا على خمس مراتب عشرية MTT بقاعدة $n_1 = n_2 = m = 16$ مراتب عشرية عندما إلا إن الجداول أوضحت انه من خلال استخدام MTT باستخدام القاعدة $n_1 = n_2 = m = 16$ صحيحة عندما تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة أعطت نتائج أفضل من حيث سرعة الاقتراب الى القيم التحليلية بعدد قليل من بينما أعطت قيمة (1)الفترات الجزئية حيث حصلنا على قيمة صحيحة الى اثنتي عشرمرتبة عشريةفي الجدول رقم (2)مطابقة للقيمة التحليلية مقربة لثلاث عشر مرتبة عشريةفي الجدول رقم.

المصادر

[1] Fox L.," Romberg Integration for aClass of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp. 87-93,1967

[2] Fox L. And Linda Hayes , " On the Definite Integration of Singular Integrands " SIAM REVIEW. ,12 , pp. 449-457 , 1970 .

[3] Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- andTwo-Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , theTechnical University of Denmark Lyngby , pp. 1-12 ,1973 .

[4] بوردين ، ريتشارد ودوكلاس فاريز، " التحليل العددي " ،مديرية دار الكتب للطباعة و النشر ، ترجمة خالد احمد السامرائي كلية التربية للبنات جامعة بغداد سنة 1992

[5] عكار ، بتول حاتم ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " ، رسالة ماجستير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة 2010

[6] ضياء ، عذراء محمد ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2009 .

[7] فرانك آيرز ، " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " ، دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين1988 .

RMTTالبرنامج المستخدم لحساب القيم التقريبية بطريقة

بلغة الماثلاب

$f(x,y,z)$ -1

وفيه $f(x,y,z)$ هو ملف لكتابة الدالة

```
function F= f(x,y,z);
F= log(x+y+z);
```

RMTTطريقة

برنامج لإيجاد التكامل الثلاثي للدالة $f(x,y,z)$ في المنطقة $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ باستعمال طريقة $RMTT$.

```
clear all
clc
a=1;b=2;c=1;d=2;e=1;f=2;eps=10^(-14);
%find triple integral of function g(x,y,z) on
[a,b]*[c,d]*[e,f]
%using RMTT
D(1)=2;D(2)=4;D(3)=6;D(4)=8;D(5)=10;D(6)=12;D(7)=14;D
(8)=16;D(9)=18;D(10)=20;D(11)=22;
n=1;h=(b-a)/n;
s(1,1)=1;
s(1,2)=h*h*h*(g(a,c,e+.5*h)+g(a,d,e+.5*h)+g(b,c,e+.5*
h)+g(b,d,e+.5*h))/4;
for i=2:10
n=2^(i-1);s(i,2)=0;
h=(b-a)/n;
for t=1:n
    s(i,2)=s(i,2)+g(a,c,e+h*((2*t-
1)/2))+g(a,d,e+h*((2*t-1)/2))+g(b,c,e+h*((2*t-
1)/2))+g(b,d,e+h*((2*t-1)/2));
for k=1:n-1;
 s(i,2)=s(i,2)+2*(g(a+k*h,c,e+h*((2*t-
1)/2))+g(a+k*h,d,e+h*((2*t-1)/2)));
end
for j=1:n-1
```

```
s(i,2)=s(i,2)+2*(g(a,c+h*j,e+h*((2*t-
1)/2))+g(b,c+h*j,e+h*((2*t-1)/2)));
for u=1:n-1
s(i,2)=s(i,2)+4*g(a+h*u,c+h*j,e+h*((2*t-1)/2));
s(i,1)=n;
end
end
end
s(i,2)=s(i,2)*h*h*h/4;
for l=3:i+1
clc
s(i,l)=(s(i,l-1)*2^D(l-2)-s(i-1,l-1))/(2^D(l-2)-1)
```

```
end
if abs(s(i,i+1)-s(i,i))<=eps;
sprintf('%5.0f %2.15f',n,s(i,i+1))
break
els
end
end
xlswrite('E:/(MTT-1).xls',s,1,'A2')
```


المستخلص

الهدف الرئيس من هذا البحث هو اشتقاق قاعدة جديدة لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة باستعمال قاعدتي شبه المنحرف والنقطة الوسطى واشتقاق حدود التصحيح (صيغة الخطأ) لها ولتحسين نتائج التكاملات الثلاثية استعملنا طريقة تعجيل رومبرك بالاعتماد على حدود التصحيح التي وجدناها ، فتبين لنا إن الطريقة المركبة من طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي z وقاعدة شبه المنحرف على البعدين الأوسط والداخلي y و x عندما عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الخارجي أي إن $(h=\bar{h}=\bar{\bar{h}})$ حيث h المسافات بين الإحداثيات على المحور z و $\bar{h}$ المسافات بين الإحداثيات على المحور y و $\bar{\bar{h}}$ المسافات بين الإحداثيات على المحور x وأسميناها $RMTT$ يمكن الاعتماد عليها في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة إذ أعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً .

Derivation numericl method for evalution triple integral and its error formula by using trapezoidal method and mid point method

Prof. Ali Hassan Mohammed

Searher.Rana Hassan helal abdolah

University of Kufa

Education college for Girls / Department of Mathematics