النقطة الدورية الاعتيادية في الديناميكا التبولوجية

الاستاذ الدكتور سليم الكتبي
جامعة الكوفة / كلية العلوم

ايناس يحيى
جامعة الكوفة / كلية التربية

المستخلص

يلقي هذا البحث الضوء على صفة الدورية الاعتيادية وعلاقتها بدورية زمرة الطور و بالصفات الديناميكية الأساسية الأخرى مثل الدورية تقريبا والدورية تقريبا اعتيادية والتكرارية والمتكررة والأصغرية والى انتقال خاصية الدورية الاعتيادية من زمرة تحويل الى زمرة تحويل اخرى تحت تاثير الهومومورفزم بين زمرتي التحويل فضلا عن وجود قضايا جديدة .

المقدمة

ان زمرة التحويل التبولوجي (Topological Transformation Group) هي الثلاثي (X,G,π) حيث ان X فضاء تبولوجي و G زمرة تبولوجية و $\pi : X \times G \to X$ دالة الفعل،تدعى زمرة التحويل التبولوجي (X,G,π) بالسيل المفرق (Discrete Flow)اذا كانت زمرة الطور فيها هي زمرة الاعداد الصحيحة الجمعية (Z,+) مع التبولوجي المفرق ،وتدعى بالسيل المستمر(Continuous Flow) اذا كانت زمرة الطور فيها زمرة الاعداد الحقيقية الجمعية (R,+)مع التبولوجي الاعتيادي ،يقال للمجموعة الجزئية A من الزمرة التبولوجية G بانها رابطة يمينيةRight Syndetic {رابطة يسارية} Left Syndetic اذا وجدت مجموعة مرصوصة $K \subset G$ بحيث { $G = AK$ } $G = KA$ ، ويقال للمجموعة الجزئية A من الزمرة التبولوجية G بانها مجموعة موسعة(Extensive Set) اذا كان تقاطع كل شبه زمرة مفعمة P في G مع A غير خال، يقال للمجموعة الجزئية P من الزمرة التبولوجية G بانها دورة (Period) النقطة x تحت تاثير G او دورة G في x اذا كانت P اكبر مجموعة جزئية من G بحيث xP $= x$ ، يقال ان x نقطة دورية (Periodic Point) تحت تأثير G او ان G دورية في x اذا كانت دورة x مجموعة رابطة جزئية من G.ويقال ان زمرة التحويل التبولوجي دورية نقطياً(Pointwise Periodic) اذا كانت زمرة التحويل دورية في كل نقطة من X ،يقال ان زمرة التحويل دورية (Periodic) اذا كانت دورة G رابطة اذا كانت (X,G,π) زمرة تحويل تبولوجي وكانت $x \in X$ فان x تسمى نقطة دورية تقريباً (Almost Periodic) تحت تاثير G اذا كان لكل جوار مفتوح U للنقطة x توجد مجموعة رابطة A جزئية من G بحيث $xA \subset U$ ، وتسمى x نقطة دورية تقريباً اعتيادية (Regularly Almost Periodic) تحت تاثير G اذا كان لكل جوار مفتوح U للنقطة x هناك زمرة جزيئة ناظمية رابطة A من G. ان النقطة x تسمى نقطة تكرارية (Isochronous) تحت تاثير G اذا كان لكل جوار مفتوح U للنقطة x هناك تحويل زمرة جزيئة ناظمية رابطة A من G بحيث $xgA \subset U$. وان النقطة x تسمى متكررة (Recurrent) تحت تاثير G اذا كان لكل جوار مفتوح U للنقطة x هناك مجموعة موسعة A جزيئة من G بحيث ان $xA \subset U$. ان مدار النقطة x (Orbit of x) تحت تاثير G هو المجموعة $xG = \{(x,g)\pi \mid g \in G\}$ ، اذاكانت M مجموعة جزئية غير خالية مغلقة لا متغيرة لاتمتلك مجموعة جزئية فعلية (Proper Sub Set) منها بهذه الشروط نفسهاعندها يقال ان M مجموعة اصغرية (Minimal Set)

ممهدة(١-١-١) [1]:

اذا كانت f هومومورفزم شاملاً ومستمراً من الزمرة التبولوجية G الى الزمرة التبولوجية H وكانت A مجموعة رابطة جزئية من G فإن $f(A)$ مجموعة رابطة جزئية من H .

قضية (١-١-٢) [2]:

اذا كانت A مجموعة رابطة جزئية من الزمرة التبولوجية G فإن A مجموعة موسعة جزئية من G .

القضايا الاتية مذكورة في [2] بدون برهان والتي سنقدمها مع البرهان كما ياتي :-

قضية (١-١-٣):

اذا كانت A مجموعة رابطة جزئية من الزمرة التبولوجية G فإن $g^{-1}Ag$ مجموعة رابطة جزئية من G لكل $g \in G$.

البرهان :

بما ان A مجموعة رابطة ، توجد مجموعة مرصوصة K جزئية من G بحيث AK=G ، وكذلك $Agg^{-1}K = G$ لكل $g \in G$ ، $g^{-1}Agg^{-1}K = g^{-1}G = G$ ، بما ان $g^{-1}K$ مجموعة مرصوصة في G اذن $g^{-1}Ag$ مجموعة رابطة جزئية من G لكل $g \in G$.

قضية (١-١-٤):

اذا كانت (X,G,π) زمرة تحويل تبولوجي ، وكانت $x \in X$ ،x نقطة دورية تحت تاثير G فإن G دورية نقطياً على xG .

البرهان :

بما ان x دورية فإن الدورة P زمرة جزئية رابطة من G نفرض ان $y \in xG$ ان ذلك يعني ان هناك $g \in G$ بحيث $y = xg$ بما ان دورة xg هي $g^{-1}Pg$ وان القضية (١-١-٣) تقتضي بأن المجموعة $g^{-1}Pg$ رابطة إذن y نقطة دورية تحت تاثير G وان G دورية نقطياً في xG

قضية (١-١-٥):

اذا كانت (X,G,π) زمرة تحويل تبولوجي وكانت $x\in X$ نقطة دورية تحت تاثير G فان x نقطة دورية تقريباً تحت تاثير G .

البرهان :

ليكن U جوار مفتوح للنقطة x ،بما ان x نقطة دورية تحت تاثير G فان الدورة P زمرة جزئية رابطة من G بحيث $xP=x$ بما ان $x\in U$ اذن $xP\subset U$ وعليه x نقطة دورية تقريباً تحت تاثير G .

قضية (١-١-٦)

اذا كانت (X,G,π) زمرة تحويل تبولوجي وكانت $x\in X$ وكانت x دورية فان x متكررة.

البرهان : باستعمال (١-١-٢)

ملاحظة (١-١-٧)

اذا كانت (X,G,π) زمرة تحويل تبولوجي وكانت $x\in X$ فان:

١- اذا كانت x نقطة دورية تحت تاثير G فان x لاتكون دورية تقريبا اعتيادية بشكل عام ولاتكون تكرارية الااذاكانت P زمرة جزئية ناظمية.

٢- اذا كانت x نقطة دورية تقريبا اعتيادية تحت تاثير G فان x نقطة تكرارية تحت تاثير G.

٣- مدار النقطة الدولاية مجموعة اصغرية لانها لامتغيرة مغلقة (مرصوصة)ولايوجد جزء من مدارعا مجموعة لامتغيرة غير خالية مغلقة .

المعلوم مما سبق ان دورة النقطة الدورية تكون زمرة جزئية رابطة ولاتكون ناظمية لذلك نقدم التعريف الاتي غير المذكور بالمصادر

تعريف **(١-١-٨)** [٣]

اذا كانت (X,G,π) زمرة تحويل تبولوجي وكانت $x\in X$ يقال ان x نقطة دورية اعتيادية (Regularly Periodic) اذا كانت دورة x زمرة جزئية ناظمية رابطة **.**

ملاحظة (١-١-٩)

ان اهمية التعريف تكمن في اهتمام الباحثين في السيول بنوعيها وخصوصا السيول المفرقة في مجالات الفوضى والكسوريات حيث تكون النقاط الدورية نقاط دورية اعتيادية .

قضية (١-١-١٠):

اذا كانت (X,G,π) زمرة تحويل تبولوجي وكانت x نقطة دورية اعتيادية فان x نقطة تكرارية .

البرهان:

نفرض ان U مجموعة مفتوحة جزئية من X تحتوي x بما ان x دورية اعتيادية فان الدورة P زمرة جزئية ناظمية رابطة $xP = x \in U$ وهكذا فان P هي تحويل زمرة جزئية ناظمية رابطة بالعنصر e اي ان x نقطة تكرارية .

نتيجة (١-١-١١):

اذا كانت (X,G,π) زمرة تحويل تبولوجي وكانت x نقطة دورية اعتيادية فان x نقطة دورية تقريبا اعتيادية .

قضية (١-١-١٢):

اذا كانت (X,G,π) زمرة تحويل تبولوجي وكانت $x \in X$ وكانت x دورية اعتيادية فان x متكررة.

البرهان :

ليكن U جوار مفتوحة للنقطة x بماان x دورية اعتيادية فان الدورة P زمرة جزئية ناظمية رابطة بحيث $xP = x$ بماان $x \in X$ اذن $xP \subset U$ بمأأن P مجموعة رابطة من القضية **(١-١-٢)** أذن P مجموعة موسعة وبالتالي x نقطة متكررة .

تعريف (١-١-١٣)

اذا كانت كل من (X,G,π) ، (Y,H,σ)زمرة تحويل تبولوجي وكانت $\varphi: X \to Y$ دالة مستمرة و $\phi: G \to H$ هومومورفزم مستمر فان الثنائي (φ,ϕ) يسمى هومومورفزم من (X,G,π) الى (Y,H,σ) عندما يكون الشكل الاتي تبادلي

$$\begin{tikzcd} X \times G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi\ \ \phi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \times H \arrow[r, "\sigma"'] & Y \end{tikzcd}$$

أي أن $((x,g)\pi)\varphi = ((x)\varphi,(g)\phi)\sigma$ لكل $x \in X, g \in G$

قضية (١-١-١٤)

اذا كانت $(\varphi,\phi):(X,G,\pi) \to (Y,H,\sigma)$ هومومورفزم وان φ شاملة و $x \in X$نقطة دورية اعتيادية تحت تاثير G فان $(x)\varphi$نقطة دورية اعتيادية تحت تاثير H .

البرهان :

بما ان x دورية اعتيادية فان هناك زمرة جزئية ناظمية رابطة من G بحيث ان

$$\{(x,a)\pi \mid a \in A\} = xA = x$$

$$(x)\varphi = (xA)\varphi = \{(x,a)\pi \mid a \in A\}\varphi = \{(x,a)\pi\varphi \mid a \in A\}$$

من تعريف الهومومورفزم

$$= \{(x)\varphi,(a)\phi)\sigma \mid (a)\phi \in (A)\phi\}$$
$$= (x)\varphi(A)\phi$$

اي ان $(A)\phi$ زمرة جزئية ناظمية لان ϕ هومومورفزم شامل وان $(A)\phi$ رابطة حسب الممهدة (١-١-١). وهذا يعني وجود زمرة جزئية ناظمية رابطة من H يجعل $(x)\varphi$ دورية اعتيادية تحت تاثير H .

المصادر الأجنبية

[1] **Alkutaibi, S. H**. Transferent and Referent Properties in Topological Dynamics,PH**.** D Tthesis, Southampton (1971).

[2] **Gottschalk, W. H** and Hedlund,G.A. Topological Dynamics, American Mathematical Society (1955).

المصادر العربية

[3]**السلامي، ايناس يحيى عبدالله**، النقطة الدورية في الديناميكا التبولوجية جامعة/ الكوفة كلية التربية ،رسالة ماجستير (٢٠٠٨).