بعض خصائص الحلقات شبه أولية إلى اليمين كلياً

Some Properties of Fully Semi Prime Right Rings

صادق عبد العزيز مهدي
مدرس في قسم علوم الحاسبات – كلية التربية – الجامعة المستنصرية

الخلاصة

في هذا البحث سأدرس صف الحلقات شبه الأولية إلى اليمين كلياً وسأعطي بعضاً من خصائصها .

Abstract

In this paper I shall study class of Fully Semi Prime Right Rings, and I shall give Some Properties of those Rings .

1 . مصطلحات وتعاريف

فيما يلي سنستخدم الرموز والمصطلحات التالية :

R = حلقة ليس من الضروري أن تكون تبديلية أو واحدية .
(Ring not necessary commutative or unitary)

U_R = زمرة العناصر القابلة للقلب في R ، (Units group of R)

Z(R) = مركز الحلقة R ، (Center of R)

SN_R = مجموعة العناصر عديمة القوة البسيطة في R ،
(Set of simple nilpotents of R)

ونعرفها كما يلي :

$$SN_R = \{ x \in R \ ; x^2 = 0 \}$$

1.1 تعاريف

- نقول عن حلقة R إنها Zi- حلقة (Zero insertive ring) إذا كانت تحقق الشـرط التالي :

$$x . y = 0 \Rightarrow x r y = 0 \quad ; \quad x,y,r \in R$$

- نقول عن حلقة واحدية R إنها v – حلقة إلى اليمين (Right v-ring) إذا كانت كل مثالية إلى اليمين من R هي تقاطع لمثاليات أعظمية إلى اليمين من R .

- نقول عن حلقة R إنها شبه تبديلية إلى اليسار (إلى اليمين) (Left semi commutative (Right …)) إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall\ r, a \in R \quad \exists\ r' \in R \ ; \ ar = r'a$$

$$(\forall\ r, a \in R \ \exists\ r' \in R \ ; \ ra = a r')$$

- نقول عن حلقة R إنها نظامية بحسب مفهوم فون نيومان (Von Neumann) إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall\ a \in R \quad \exists\ r \in R \ ; \ a = a r a$$

- نقول عن حلقة R إنها إبدالية نظامية (Abelian regular) إذا تحقق الشـرط التالي :

$$\forall\ a \in R \quad \exists\ r \in R \ ; \ a = a^2 r$$

تعاريف 2.1

1 . نقول عن مثالية إلى اليمين P من R إنها مثالية شبه أولية إلى اليمين في R (Semi prime right ideal) إذا كانت $P \neq R$ وتحقق الشرط التالي :

$I^2 \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P$ لأي مثالية إلى اليمين I من R .

- نقول عن حلقة R إنها حلقة شبه أولية إلى اليمين (Semi prime right ring) إذا كانت $\{0\}$ مثالية شبه أولية إلى اليمين في R .
- نقول عن حلقة R إنها حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً (Fully semi prime right ring) إذا كانت جميع مثاليات R اليمينية هي مثاليات شبه أولية إلى اليمين في R .

2 . نقول عن مثالية إلى اليمين P من R إنها مثالية أولية إلى اليمين في R (Prime right ideal) إذا كانت $P \neq R$ وتحقق الشرط التالي :

$I\,J \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P$ او $J \subseteq P$ لأي مثاليتين إلى اليمين J , I من R .

- نقول عن حلقة R إنها حلقة أولية إلى اليمين (Prime right ring) إذا كانت $\{0\}$ مثالية أولية إلى اليمين في R .
- نقول عن حلقة R إنها حلقة أولية إلى اليمين كلياً (Fully prime right ring) إذا كانت جميع مثاليات R اليمينية هي مثاليات أولية إلى اليمين في R .

3 . نقول عن مثالية إلى اليمين P من R إنها مثالية تامة الأولية إلى اليمين في R (Completely prime right ideal) إذا كانت $P \neq R$ وتحقق الشرط التالي :

$a\,b \in P \Rightarrow a \in P$ أو $b \in P$ لأي عنصرين b , a من R .

- نقول عن حلقة R إنها حلقة تامة الأولية إلى اليمين (Completely prime right ring) إذا كانت $\{0\}$ مثالية تامة الأولية إلى اليمين في R .
- نقول عن حلقة R إنها حلقة تامة الأولية إلى اليمين كلياً (Fully completely prime right ring) إذا كانت جميع مثاليات R اليمينية هي مثاليات تامة الأولية إلى اليمين في R .

ملاحظات 3.1

1 . يمكن أن نرى بسهولة أن كل مثالية تامة الأولية إلى اليمين هي مثالية أولية إلى اليمين وأن كل مثالية أولية إلى اليمين هي مثالية شبه أولية إلى اليمين . ومن هنا نجد الرابطة بين صفوف الحلقات الواردة في التعاريف (2.1) السابقة .

2 . إذا كانت R حلقة واحدية (Unitary ring) وكانت $R \neq P$ مثالية إلى اليمين من R فانه يبرهن بسهولة على أن P تكون أولية إلى اليمين إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي :

$a\,R\,b \subseteq P \Rightarrow a \in P$ أو $b \in P$ لأي عنصرين b , a من R .

وهذا الشرط كافٍ في حالة كون R غير واحدية .

ويبرهن على إن P شبه أولية إلى اليمين إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي :

$a\,R\,a \subseteq P \Rightarrow a \in P$ لأي عنصر a من R .

وإن هذا الشرط كافٍ في حالة كون R غير واحدية .

2. ملاحظات ونتائج عن المثاليات شبه الأولية إلى اليمين والمثاليات الجامدة (المتساوية القوة)

ملاحظة 1.2

إذا كانت M مثالية أعظمية إلى اليمين (Maximal right ideal) من حلقة واحدية R فان M شبه أولية إلى اليمين لأن :

إذا كانت I مثالية إلى اليمين من R بحيث $I^2 \subseteq M$ وإذا فرضنا جدلاً أن $I \not\subseteq M$ فإننا سنجد عنصراً i من I بحيث أن $i \notin M$. وبما أن M أعظمية إلى اليمين فان $R = iR + M$ ومنه $1 = ir + m$ حيث $r \in R$ و $m \in M$ ومنه $i = i\,r\,i + mi$ حيث

$mi \in MR \subseteq M$ و $i\,r\,i = (\,i\,r\,)\,i \in I.I \subseteq R$

ومنه نجد أن $i \in M$ ونحصل على تناقض . إذن $I^2 \subseteq M \Rightarrow I \subseteq M$
وبالتالي فان M مثالية شبه أولية .

ملاحظة 2.2
تقاطع مثاليات شبه أولية إلى اليمين من حلقة R هو مثالية شبه أولية إلى اليمين لأن :
إذا كانت $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \wedge}$ أسرة مثاليات شيه أولية إلى اليمين من R وكانت $P = \bigcap_{\alpha \in \wedge} P_\alpha$ وإذا فرضنا أن I مثالية إلى اليمين من R بحيث $I^2 \subseteq P$ عندئذ نجد أن $I^2 \subseteq P_\alpha$ لكل α من $\wedge$ وبما إن P_α شبه أولية إلى اليمين فان $I \subseteq P_\alpha$ لكل α من $\wedge$ وبالتالي $I \subseteq P$
وبالتالي P مثالية شبه أولية إلى اليمين .

ملاحظة 3.2
ينتج عن الملاحظتين (1.2) و (2.2) السابقتين أن أي تقاطع لمثاليات أعظمية إلى اليمين من حلقة واحدية R هو مثالية شبه أولية إلى اليمين .
وينتج عن هذا وعن تعريف جذر جاكبسون $J(R)$ ان $J(R)$ هو مثالية شبه أولية إلى اليمين في كل حلقة واحدية R . وإذا كان $J(R) = \{0\}$ في حلقة واحدية R فان R تكون حلقة شبه أولية إلى اليمين .
وينتج عما تقدم وعن تعريف الـ v – حلقة إلى اليمين ان كل v – حلقة إلى اليمين هي حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً .
وبما أن كل حلقة واحدية نظامية بحسب مفهوم Von Neumann هي v - حلقة إلى اليمين فان كل حلقة نظامية هي حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً .

تمهيدية 4.2
إذا كانت R حلقة فيها $SN_R = \{0\}$ فان $\{0\}$ مثالية شبه أولية إلى اليمين (وبالتالي R حلقة شبه أولية إلى اليمين) . كما إن جميع العناصر الجامدة في R (Idempotent elements) هي مركزية .
البرهان :
إذا كانت I مثالية إلى اليمين بحيث إن $I^2 \subseteq \{0\}$ وإذا كان $i \in I$ فان $i^2 \in I^2 \subseteq \{0\}$
أي أن $i^2 = 0$ أي أن $i \in SN_R = \{0\}$ ومنه $i=0$ وبالتالي $I \subseteq \{0\}$. ولذلك فان $\{0\}$ مثالية شبه أولية إلى اليمين .
من جهة ثانية ؛ إذا كان e عنصراً جامداً من R وكان r عنصراً ما من R فإننا نجد بسهولة أن $(\,e\,r - e\,r\,e\,) \in SN_R$ و $(\,re - e\,r\,e\,) \in SN_R$ ولذلك فان :
$re - e\,r\,e = 0 \;\;\&\;\; e\,r - e\,r\,e = 0$. ومنه $e\,r = e\,r\,e = re$ أي أن e جامد مركزي .

ملاحظة 5.2

إذا كانت R هي Zi - حلقة واحدية فيها $\{0\}$ مثالية شبه أولية إلى اليمين فان $SN_R = \{0\}$ لأن :

إذا كان $a \in SN_R$ فان $a^2 = 0$ أو $a.a = 0$ وبما أن R هي Zi - حلقة فان $a R a \subseteq \{0\}$ وبما أن $\{0\}$ شبه أولية إلى اليمين فان $a \in \{0\}$ (ملاحظة 3.1) ومنه $a = 0$ وبالتالي $SN_R = \{0\}$.

* واضح ان كل حلقة شبه تبديلية الى اليسار (الى اليمين) هي Zi - حلقة .

ملاحظة 6.2

إذا كانت I مثالية إلى اليمين من حلقة R بحيث ان I^2 تقاطعاً لمثاليات شبه أولية إلى اليمين فان I جامدة لأن :

إذا كانت $I^2 = \bigcap_{\alpha\in\wedge} P_\alpha$ حيث P_α شبه أولية إلى اليمين لكل α من $\wedge$ عندئذ نجد ان $P_\alpha \supseteq I^2$ لكل α من $\wedge$ ومنه فان $I \subseteq P_\alpha$ لكل α من $\wedge$ لأن P_α شبه أولية إلى اليمين وبالتالي $I \subseteq \bigcap_{\alpha\in\wedge} P_\alpha = I^2 \subseteq I$. أي ان $I = I^2$ أي ان I جامدة .

نتيجة 7.2

a . ينتج عن (6.2) انه إذا كانت I^2 مثالية شبه أولية إلى اليمين فان I جامدة ، وينتج عن هذا انه إذا كانت R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً فان كل مثالية إلى اليمين من R تكون جامدة .

b . ينتج عن (6.2) و (1.2) انه إذا كانت I مثالية إلى اليمين من حلقة واحدية R بحيث أن I^2 تقاطع لمثاليات أعظمية إلى اليمين فان I جامدة .

ملاحظة 8.2

إذا كانت R حلقة واحدية وكانت M مثالية أعظمية إلى اليمين في R وإذا وجدت مثالية (من الجانبين) $I \neq 0$ من R بحيث يكون $I \bigcap M = \{0\}$ فان M جامدة لأن :

إذا وضعنا $J = \{\ x\in R\ ;\ Mx \subseteq M^2\ \}$ فإننا نجد بسهولة أن J مثالية إلى اليمين من R وان $M \subseteq J$. وبما أن $M I \subseteq I \cap M = \{0\} \subseteq M^2$ فان $I \subseteq J$ ومنه نجد أن :

$M \subsetneq M + I \subseteq J \subseteq R$. وبما أن M أعظمية إلى اليمين فان $J = R$ ومنه $1 \in J$ وبالتالي $M.1 \subseteq M^2$ أي أن $M \subseteq M^2 \subseteq M$ وبالتالي $M = M^2$.

ملاحظة 9.2 [1]

إذا كانت $I \neq \{0\}$ مثالية إلى اليمين من حلقة R وكانت $I \subseteq J (R)$ فان I ليست جامدة لأن :

لو كانت I جامدة لحصلنا على $I.I = I$ و $I \subseteq J (R)$ ، ولذلك ينتج عن نظرية ناكاياما أن $I = \{0\}$.

* ينتج عن هذه الملاحظة انه إذا كانت $J (R)$ مثالية جامدة فان $J (R) = \{0\}$

* ينتج عن a من (7.2) انه إذا كانت R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً فان $J (R) = \{0 \}$.

تمهيدية 10.2 [1]

إذا كانت R حلقة يتحقق فيها $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = \{0\}$ من اجل كل مثالية أعظمية إلى اليمين M فان R لا تملك مثاليات جامدة غير $\{0\}$, R .

البرهان :

إذا كانت $R \neq I$ مثالية إلى اليمين جامدة في R فانه ينتج عن ([1] p 57) أنه توجد مثالية أعظمية إلى اليمين M من R بحيث أن $I \subseteq M$ ومنه $I \subseteq I^n \subseteq M^n$ من أجل $n = 1 , 2 , \ldots$ وبالتالي $I \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = \{0\}$ أي أن $I = \{0\}$.

نتيجة 11.2

إذا كانت R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً وواحدية ويتحقق فيها $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = \{0\}$ لكل مثالية أعظمية إلى اليمين M من R فان R حلقة تقسيم (Division ring) .

البرهان :

ينتج عن a من (7.2) ومن (10.2) أن R لا تملك مثاليات إلى اليمين إلا R , $\{0\}$ ولذلك فان R حلقة تقسيم .

3 . نظريات ونتائج عن الحلقات شبه الأولية كلياً

نظرية 1.3

R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً $\Leftrightarrow$ كل مثالية إلى اليمين من R جامدة .

البرهان :

$\Leftarrow$: ينتج عن a من (7.2) .

$\Rightarrow$: لتكن P مثالية إلى اليمين من R ولنفرض ان $I^2 \subseteq P$ حيث I مثالية إلى اليمين من R . ينتج عن الفرض ان $I = I^2$ ولذلك فان $I \subseteq P$ أي أن كل مثالية إلى اليمين P من R هي مثالية شبه أولية إلى اليمين ولذلك فان R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً .

نتيجة 2.3

إذا كانت R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً وكانت J , I مثاليتين إلى اليمين من R فان $I \cap J \subseteq J . I$ و $I \cap J \subseteq I . J$ وبالتالي $I \cap J = I . J \cap J . I$

وإذا كانت J , I مثاليتين (من الجانبين) من R فان : $I . J = I \cap J = J \cap I = J . I$

البرهان :

ينتج عن النظرية (1.3) أن $I \cap J$ مثالية إلى اليمين جامدة ولذلك فان :

$$I \cap J = (I \cap J)^2 = (I \cap J) (I \cap J) \subseteq I . J$$

وكذلك $I \cap J \subseteq J . I$ ومنه $I \cap J \subseteq I . J \cap J . I$

ولكن : $I . J \subseteq I \;\&\; J . I \subseteq J \Rightarrow I . J \cap J . I \subseteq I \cap J$

وبالتالي : $I \cap J = I.J \cap J.I$

وإذا كانت J و I مثاليات (من الجانبين) فانه من الواضح أن $I . J \subseteq I \cap J$

وبالتالي $I .J = I \cap J$

نظرية 3.3

إذا كانت R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً وكانت A مثالية من الجانبين في R فان :

a) R / A حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً .

b) A حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً .

البرهان :

a) اعتماداً على النظرية (1.3) فانه يكفي أن نبرهن على أن كل مثالية إلى اليمين من R / A جامدة :

لتكن $\bar{I}$ مثالية إلى اليمين من R / A عندئذ $\bar{I} = I / A$ حيث I مثالية إلى اليمين من R تحوي A ونلاحظ ان $\bar{I}^2 \subseteq \bar{I}$ ثم انه إذا كان $\bar{x} \in \bar{I} = I / A$ فان $\bar{x} = x + A$ حيث $x \in I = I^2$ ولذلك $x = i_1 . i_2$ حيث $i_1 , i_2 \in I$

ومنه $\bar{x} = x + A = i_1 . i_2 + A = (i_1 + A) (i_2 + A) \in I / A . I / A = \bar{I}^2$

وبالتالي فان $\bar{I} \subseteq \bar{I}^2$ أي أن $\bar{I} = \bar{I}^2$

b) إذا كانت I مثالية إلى اليمين من A وإذا فرضنا $M = I + I R$ فإننا نجد بسهولة أن M مثالية إلى اليمين من R وبما أن R شبه أولية إلى اليمين كلياً فانه ينتج عن (1.3) أن $M = M^2$ ومنه

$$I \subseteq I + I R = (I + I R)^2 = I.I + I . I R + I R I + I R.I R \subseteq I$$

لأن :

$$I R \subseteq A R \subseteq A \Rightarrow I .I R \subseteq I . A \subseteq I$$
$$I R I \subseteq I R A \subseteq I A \subseteq I$$
$$I R I R \subseteq I . R A R \subseteq I. A \subseteq I$$

إذن $I = I + I R = M$ ومنه $I^2 = M^2 = M = I$

أي أن كل مثالية إلى اليمين I من A هي مثالية جامدة ولذلك فان A حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً .

ملاحظة 4.3

إذا كانت R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً فان $a \in a R$ لكل a من R .

البرهان :

ليكن $a \in R$ ولتكن $I = \{ a r + n a \ ; r \in R , n \in Z \}$

عندئذ نجد بسهولة أن I مثالية إلى اليمين من R ولدينا $a = a . 0 + 1 . a \in I$

كما أن $I^2 \subseteq IR \subseteq a R$ لأن :

$$x \in I R \Rightarrow x = (a r_1 + an) r = a r_1 r + a (n r) = a r_2 + a r_3 = a r_4 \in a R$$

إذن $I^2 \subseteq a R$ وبما أن R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً فان $I = I^2$

ومنه $a \in I \subseteq a R$ أي أن $a \in a R$

(*) ينتج عن هذه الملاحظة انه إذا كانت R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً وكانت I مثالية إلى اليمين من R فان $a R a \subseteq I \Rightarrow a \in I$

لأن :

$$a R a \subseteq I \Rightarrow a R . a R \subseteq I R \subseteq I \Rightarrow a R \subseteq I$$
$$\Rightarrow a \in I$$

- بطريقة مماثلة نرى انه إذا كانت R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً وكانت I مثالية أولية إلى اليمين من R فان :

$$a R b \subseteq I \Rightarrow \quad a \in I \quad \text{أو} \quad b \in I$$

نظرية 5.3

إذا كانت R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً وكان e عنصراً جامداً في R فان $e R e$ حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً .

البرهان :

لتكن I مثالية إلى اليمين من $e R e$ ولنفرض أن :

$(e a e)(e R e)(e a e) \subseteq I$ عندئذ نلاحظ أن :

$$x \in I \Rightarrow x \in e R e \Rightarrow x = e r e \Rightarrow x e = e r e e = e r e = x$$
$$\Rightarrow x = x e \in I e$$

ومنه $I \subseteq I e \subseteq I R$ وبالتالي $(e a e)(e R e)(e a e) \subseteq I R$

أي أن $(e r e^2) R (e^2 a e) \subseteq I R$ أي أن $(e a e) R (e a e) \subseteq I R$

وبما أن $I R$ مثالية إلى اليمين من R و R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً فان :

$e a e \in I R$ (بحسب (*) من 4.3) . ومنه نجد أن :

$$e a e = e a e^2 = (e a e) e \in I R e \subseteq I e . R e = I (e R e) \subseteq I$$

(لأن $I \subseteq I e$ كما بينا أعلاه ولأن I مثالية إلى اليمين من $e R e$)

إذن $e a e \in I$ وبالتالي I مثالية شبه أولية إلى اليمين كلياً وبالتالي $e R e$ حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً .

نظرية 6.3

إذا كانت R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً وشبه تبديلية إلى اليسار فان R حلقة نظامية بحسب مفهوم Von Neumann .

البرهان :

ليكن $a \in R$ عندئذ $a R$ مثالية إلى اليمين جامدة بحسب (1.3)

أي أن $a R = a R . a R$ وبحسب الملاحظة (4.3) يكون $a \in a R . a R$

ولذلك فان $a = a r_1 . a r_2$ وبما أن R تبديلية إلى اليسار فانه يوجد r_3 بحيث $a r_2 = r_3 a$ ولذلك فان $a = a r_1 r_3 a = a r a$ ومنه R حلقة نظامية .

نظرية 7.3 [2]

إذا كانت R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً وشبه تبديلية إلى اليمين فان R حلقة إبدالية النظامية (وبالتالي جميع العناصر الجامدة في R مركزية)

البرهان :

ليكن $a \in R$ عندئذ $a = a r_1 . a r_2$ (كما في برهان النظرية السابقة)

وبما ان R تبديلية إلى اليمين فانه يوجد r_3 من R بحيث أن $r_1 a = a r_3$

ولذلك فان $a = a^2 r_3 r_2 = a^2 r$ ومنه فان R حلقة إبدالية النظامية ، ولذلك فان جميع عناصرها الجامدة مركزية .

نظرية 8.3

a) إذا كانت R حلقة شبه أولية إلى اليمين وكانت مجموعة مثالياتها اليمينية مرتبة تماماً (Completely ordered) فان R حلقة أولية إلى اليمين كلياً .

b) إذا كانت R حلقة واحدية وشبه أولية إلى اليمين كلياً وكانت مجموعة مثالياتها إلى اليمينية مرتبة تماماً فان R حلقة تقسيم ، والعكس صحيح .

البرهان :

a) لتكن P مثالية إلى اليمين R ولنفرض أن I و J مثاليتين إلى اليمين من R بحيث أن $I . J \subseteq P$

بما أن مجموعة مثاليات R اليمينية مرتبة تماماً فانه إما $J \subseteq I$ أو $J \subseteq I$ ، فإذا كانت $J \subseteq I$ فانه ينتج عن كون R شبه أولية إلى اليمين كلياً ان $I^2 = I$ (بحسب 1.3)

ومنه $I = I . I \subseteq I . J \subseteq P$

وإذا كانت $I \subseteq J$ فإننا نجد أن $J \subseteq P$

إذن P مثالية أولية إلى اليمين وبالتالي R حلقة أولية إلى اليمين كلياً .

b) ينتج عن (*) من (9.2) ان $J (R) = \{0\}$ وبما أن مجموعة مثاليات R اليمينية مرتبة تماماً فان R تملك مثالية أعظمية إلى اليمين وحيدة (هي اتحاد جميع مثاليات R اليمينية الفعلية) ولتكن هذه المثالية M ، عندئذ ينتج عن تعريف جذر جاكبسون ان $M = J (R) = \{0\}$. ولذلك فان R لا تحوي مثاليات إلى اليمين الا $\{0\}$, R وبالتالي فان R حلقة تقسيم .

والعكس واضح لأن R في هذه الحالة لا تحوي مثاليات إلى اليمين إلا $\{0\}$, R .

نظرية 9.3

R حلقة شبه أولية إلى اليمين وبسيطة $\Leftrightarrow$ R حلقة أولية إلى اليمين كلياً .

البرهان :

$\Leftarrow$: لتكن P مثالية إلى اليمين من R ولنفرض أن I و J مثاليتين إلى اليمين من R بحيث أن $I . J \subseteq P$

إذا كانت $J = \{0\}$ فان $J \subseteq P$ وإذا كانت $J \neq \{0\}$ فان $R J$ مثالية غير صفرية في R ، وبما أن R بسيطة فان $R = R J$ وبما أن R شبه أولية إلى اليمين كلياً فان $a \in a R$ لكل a من R (بحسب 4.3) ومنه $I \subseteq I R \subseteq I$ أي أن $I = I R$ وبالتالي

$I = I R = I R J = I J \subseteq P$

إذن P مثالية أولية إلى اليمين وبالتالي R حلقة أولية إلى اليمين كلياً .

$\Rightarrow$: واضح أن R شبه أولية إلى اليمين كلياً . ومن جهة ثانية ، لتكن $P \neq \{0\}$ مثالية فعلية من R . عندئذ توجد مثالية أعظمية إلى اليمين M بحيث ان $P \not\subseteq \{0\}$

(وإلا لكانت $P \subseteq J (R) = \{0\}$)

ان $M \cap P$ مثالية إلى اليمين من R ولذلك فهي أولية إلى اليمين ولدينا $M P \subseteq P \cap M$ وبالتالي إما $M \subseteq P \cap M \subseteq P$ أو $P \subseteq P \cap M \subseteq M$

وينتج عن كون M أعظمية إلى اليمين أن $M = P$ ومنه $P \subseteq M$ وفي كلتا الحالتين نصل إلى تناقض مع $M \not\subseteq P$. إذن إما $P = \{0\}$ أو $P = R$ وبالتالي R حلقة بسيطة

نظرية 10.3

إذا كانت R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً وفيها $\{0\}$ مثالية أولية فان $Z (R) = \{0\}$ أو $Z (R)$ حقل و R واحدية .

البرهان :

إذا كانت $Z(R) \neq \{0\}$ فانه يوجد $0 \neq a \in Z(R)$ وتكون $a^2 R$ مثالية (من الجانبين) في R

ولدينا $a R . a R = a . a R R \subseteq a^2 R$

وبما أن $a^2 R$ شبه أولية إلى اليمين فان $a R \subseteq a^2 R$

وبما أن R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً فان $a \in a R$ (بحسب 4.3)

وبالتالي $a \in a^2 R$ ولذلك فان $a = a^2 b$ حيث $b \in R$ ، فإذا وضعنا $e = a b$ نجد أن :

$$e^2 = e . e = a b . a b = a^2 b . b = a b = e$$

أي أن e جامد ، ثم أن :

$$a R = a^2 b R = a b a R \subseteq e R = a b R \subseteq a R \Rightarrow a R = e R$$

وكذلك فان :

$$R a = R a^2 b = R a a b \subseteq R e = R a b = R b a \subseteq R a \Rightarrow R a = R e$$

وبما أن $a R = R a$ لأن a من $Z(R)$ فان $e R = R e$

وبما أن $e^2 = e$ فان $e r = r e$ لكل r من R لأن :

$$\left.\begin{cases} e r \in e R = R e \Rightarrow e r = r' e \\ \\ r e \in R e = e R \Rightarrow r e = e r'' \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} e r e = r' e^2 = r' e = e r \\ \\ e r e = e^2 r'' = e r'' = r e \end{cases}\right\} \Rightarrow e r = e r e = r e$$

إذن e جامد مركزي ونلاحظ أن :

$$a(r - r e) = a r - a r e = a r - r a e = a r - r a = a r - a r = 0$$

ولذلك فان :

$$a R(r - r e) = R a(r - r e) \subseteq \{0\}$$

وبما أن $\{0\}$ مثالية أولية فانه ينتج عن (*) من (4.3) أن $r - r e \in \{0\}$

وبالتالي $r = r e$ وبما أن e مركزي فان $r = r e = e r$ لكل r من R

أي أن e يمثل عنصر وحدة في الحلقة R وبالتالي R واحدية .

وبما أن :

$$a(b r - r b) = a b r - a r b = a b r - r a b = e r - r e = 0$$

فان :

$$a R(b r - r b) = R a(b r - r b) \subseteq \{0\}$$

ومرة ثانية ينتج عن (*) من (4.3) أن $\{0\}$ $b r - r b \in$ وبالتالي $b r = r b$ لكل r من R وبالتالي $b \in Z(R)$ ولدينا :

$a b = e = b a$ حيث $e = 1$ عنصر وحدة في $Z(R)$.

إذن لكل عنصر $a \neq 0$ من $Z(R)$ مقلوب في $Z(R)$ ولذلك فان $Z(R)$ حقل .

ملاحظات 11.3

1. يمكن الاستعاضة عن الشرط $\{0\}$ مثالية أولية الوارد في (10.3) بالشرط $Z(R)$ لا يحوي قواسم للصفر من R إلا الصفر .
2. ينتج عن (10.3) وعن الملاحظة السابقة انه إذا كانت R حلقة تبديلية لا تحوي قواسم للصفر إلا الصفر وشبه أولية كلياً فان R تكون حقلاً .
3. ينتج عن (10.3) انه إذا كانت R حلقة شبه أولية إلى اليمين كلياً وفيها $\{0\}$ مثالية أولية وكانت R ليست واحدية فان $Z(R) = \{0\}$.

References

[1] . Lambek , J ., Lectures on Rings and Modules , Chelsea Pub. Com . New York , 1967 .

[2] Goodearl,K .R., Von Neumann regular rings , Pitman , 1979 .

[3] . Tsutsui , H. , Fully Prime Rings 11 Com. In Algabra , 24 (9) , (1996) , 2981-2989

[4] . Okkour , S . M . , Idemptents In Group Rings, Springer Verlag, New York , 2000 .