مقارنة طرائق تقدير معلمات ومعولية التوزيع الاسي المختلط باستخدام المحاكاة

أ.م.د. فاتن فاروق البدري

المستخلص

يتناول هذا البحث دراسة احد نماذج الفشل الواسعة الاستخدام في دراسات المعولية واختبارات الحياة عندما يكون المجتمع غير متجانس ، وهو التوزيع الاسي المختلط لمجتمعين جزئيين بوجود نسبة الخلط ، مع الاخذ بنظر الاعتبار امكانية تحديد المفردة الى المجتمع الجزئي .
تم تعريف الدوال الاحتمالية والتراكمية ودالة المعولية لكل مجتمع جزئي ، ثم التطرق الى كيفية تقدير المعولية ، حيث استخدم مقدر بيز ، ثم مقدر الامكان الاعظم لايجاد المقدرات للمعلمات $(\alpha, \theta_1, \theta_2)$ ثم تقدير دالة المعولية . صممت تجارب محاكاة خاصة واستخدمت طريقة تكرارية خاصة للتوصل الى المعلمات ، اجريت المقارنة بواسطة المحاكاة باستخدام مؤشر متوسط مربعات الخطأ التجريبي MSE

Abstract

The purpose of this research is to estimate the reliability of the mixture of two exponential distributions for two subpopulations we use the Bayesian estimate method for the failure times in two kinds of population, one of them each unit of sample is belong to some population while in the second population there in formation is not available, when the unit belong for the first population we estimate reliability by Bayes method , while for the second population we apply maximum likelihood method to estimate reliability .
The experimental comparison was done by simulation procedure. Several experiments using the important statistical measure which is the mean square error (MSE). The method of direct search method, are used for finding MLE. Then these two important methods are used to estimate the reliability function for mixed exponential model. All the results of simulation are explained by tables.

1. المقدمة

يعد مفهوم المعولية من المفاهيم التي رافقت التطور التكنولوجي للاجهزة والمكائن والانظمة الالكترونية المعقدة في مجالات عديدة منها الطب والطاقة النووية والكهرباء وبحوث الفضاء ، وتساهم المعولية في البحث عن افضل الطرائق والاساليب التي تضمن تحقيق الاهداف المرسومة للاجهزة والمعدات ، من خلال دراسة العطلات والتوقفات الفجائية والفشل المبكر الذي يؤدي الى خسائر مادية وانخفاض مستوى الانتاج .
وتعرف المعولية لجهاز ما عند الزمن t وتحت ظروف معينة بانها " احتمال بقاء الجهاز يعمل دون ان يصيبه اي خلل او فشل خلال الفترة الزمنية [0,1)" ، وقد نشرت العديد من البحوث

والدراسات المتعلقة بالمعولية سواء تلك المستندة الى الطرائق التقليدية او الطرائق البيزية او التقديرات المقلصة او المعدلة وغيرها ، ومن الباحثين نذكر على سبيل المثال لا الحصر الباحث Pugh E.L. عام 1963 .

2. الجانب النظري

يعتبر التوزيع الاسي من التوزيعات المهمة في اختبارات الحياة ودراسة توزيعات اوقات الفشل في جميع المجالات منها الميكانيكية والهندسية والفيزياوية ، وفي كثير من الاحيان يكون المجتمع غير متجانس ، اي انه يضم مجتمعات جزئية subpopulation هي $sp_1, sp_2, \ldots, sp_k$ ممزوجة بنسب $p_1, p_2, \ldots, p_k$ من بعض انواع المزج (الخلط) .

في النوع الاول يمكن تحديد انتماء كل وحدة من وحدات العينة تعود الى اي مجتمع جزئي spj وعندئذ تكون دالة الامكان الاعظم لهذا النوع من المجتمعات هي

$$L(t_1, t_2, \ldots, t_n / \theta, P) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} P_1^{n_1} P_2^{n_2} \ldots P_k^{n_k} \left(\prod_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{k} f(t_{ji}, \theta_j) \right) \quad \ldots(1)$$

حيث ان θ هو متجه المعلمة

$$\underline{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_k]$$

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_k = 1$$

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

اما النوع الثاني من المجتمعات الجزئية التي تم خلطها فعندها لايمكن تحديد انتماء المفردة الى اي مجتمع جزئي تعود وفي هذه الحالة تكون دالة الامكان الاعظم للمتغير العشوائي T هي

$$L(t_1, t_2, \ldots, t_n / \theta, P) = \prod_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{k} P_j f(t_i / \theta_j) \right] \quad \ldots \ (2)$$

ولكن T متغير عشوائي يتوزع اسيا بمتوسط عينة θ فان دالة الكثافة الاحتمالية له هي

$$f(t/\theta) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} & t > o \ , \theta > 0 \\ o & otherwise \end{array} \right\} \quad \ldots \ (3)$$

فاذا كان المجتمع قيد البحث يتكون من مجتمعين جزئيين اي ان k=2 فان دالة الامكان الاعظم للنوع الاول هي

$$f\left(t_{11},t_{12},...,t_{1n1},t_{21},t_{22},...,t_{2n2}/\theta_1,\theta_2,P\right)=\frac{n!}{n_1!n_2!}\frac{P^{n_1}}{\theta_1^{n_1}}\frac{\left(1-P^{n_1}\right)}{\theta_2^{n_2}}$$

$$e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}}{\theta_1}}\,e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}}{\theta_2}} \qquad \ldots (4)$$

اما بالنسبة للنوع الثاني فتكون دالة الامكان الاعظم هي

$$L(t,\theta_1,\theta_2,P)=\prod_{i=1}^{n}\left[P\frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{t_i}{\theta_1}}+(1-P)\frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{t_i}{\theta_2}}\right] \qquad \ldots (5)$$

وتكون دالة التوزيع التراكمية (c.d.f) للتوزيع الاسي المختلط فهي

$$F_{1,2,\ldots k}(t)=\frac{n_1}{n}F_1(t)+\frac{n_2}{n}F_2(t)+\ldots+\frac{n_k}{n}F_k(t)$$

ومنها تكون دالة المعولية

$$R_{1,2,\ldots k}(t)=\frac{n_1}{n}R_1(t)+\frac{n_2}{n}R_2(t)+\ldots+\frac{n_k}{n}R_k(t)$$

وبالنسبة لدالة الخسارة التربيعية ، والتوزيع الاولي ل θ والمعرف بالدالة الاحتمالية الاولية

$$g(\theta)=\frac{k}{\theta^c} \qquad \theta>0 \quad ,C=1,2,3,\ldots$$

فان مقدر بيز لدالة المعولية $R(t/\theta)$ هو

$$\hat{R}_{Bayes}(t/\theta)=\int_{\forall t}R(t/\theta)\quad h(\theta/t_1,t_2,\ldots,t_n)d\theta \qquad \ldots (6)$$

يهدف هذا البحث الى تقدير المعولية لدالة التوزيع الاسي المختلط عندما (k=2) وباستخدام نوعين من المقدرات هما مقدر بيز ودالة الخسارة التربيعية، ومقدر الامكان الاعظم ، وسوف نتناول اولا كيفية التوصل الى مقدر بيز لدالة المعولية للتوزيع الاسي المختلط

$$\hat{R}_{Bayes}(t/\theta)=E[R(t)/T>t] \qquad \ldots (7)$$

حيث ان التوزيع اللاحق لكل من P,θ_2,θ_1 بوجود t هو

$$f\left(\theta_1,\theta_2,P/t_{1i},t_{2i}\right)=\frac{L\left(t_{1i},t_{2i}/\theta_1,\theta_2,P\right)}{f\left(t_{1i},t_{2i}\right)} \quad \ldots \ (8)$$

وان $g\left(\theta_1,\theta_2,P\right)$ هو التوزيع الاولي prior distribution وممكن ان ياخذ احدى صيغ Jeffery وهو

$$g\left(\theta_1,\theta_2,P\right)=\frac{1}{\theta_1^c\theta_1^c} \qquad c=1,2,3 \ ,\theta_1>0, \quad \theta_2>0$$

وان الدالة الحدية $f\left(t_{1i},t_{2i}\right)$ كالاتي

$$f\left(t_{1i},t_{2i}\right)=\frac{n!}{n_1!n_2!}\int_P\int_{\theta_2}\int_{\theta_1}\frac{p^{n_1}\left(1-P^{n_2}\right)}{\theta_1^{n_1+c}\theta_2^{n_2+c}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}}{\theta_1}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}}{\theta_2}}d\theta_1 d\theta_2 dP \quad \ldots \ (9)$$

ليكن

$$y=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}}{\theta_1}$$

فان

$$\theta_1=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}}{y}\Rightarrow d\theta_1=-\frac{\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}}{y^2}dy$$

$$\int_0^\infty\left(\frac{y}{\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}}\right)^{n_1+c}e^{-y}\ -\frac{\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}}{y^2}d\theta=-\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}}\right)^{n_1+c-1}\Gamma\left(n_1+c-1\right)$$

وبنفس الطريقة نثبت ان التكامل بالنسبة لـ θ_2 هو

$$\int_0^\infty\frac{1}{\theta_2^{n_2+c}}\ e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}}{\theta_2}}d\theta=-\frac{\Gamma\left(n_2+c-1\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}\right)^{n_2+c-1}}$$

واخيرا فالتكامل بالنسبة لـ P هو

$$\int_0^1 P^{n_1}\left(1-P\right)^{n_2}dp=\frac{\Gamma\left(n_1+1\right)\Gamma\left(n_2+1\right)}{\Gamma\left(n_1+n_2+2\right)}$$

ومن هنا نجد ان التوزيع اللاحق هو

$$g\left(\theta_1,\theta_2,P/t_{1i},t_{2i}\right)=\frac{(n_1+n_2+1)!\left(\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}\right)^{n_1+c-1}\left(\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}\right)^{n_2+c-1}\frac{P^{n_1}}{\theta_1^{n_1+c}}\frac{(1-P)^{n_2}}{\theta_2^{n_2+c}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}}{\theta_1}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}}{\theta_2}}}{n_1!n_2!\Gamma(n_1+c-1)\Gamma(n_2+c-1)}$$

نفرض ان

$$u_1=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}}{\theta_1}\quad,\quad u_2=\frac{\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}}{\theta_2}$$

$$R(t)=1-\int_0^t\int_0^t\frac{1}{\theta_1}\frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{u1}{\theta_1}}e^{-\frac{u2}{\theta_2}}du_1du_2$$

$$=e^{-\frac{t_1}{\theta_1}-\frac{t_2}{\theta_2}} \qquad \ldots (10)$$

واعتمادا على ذلك يكون مقدر بيز لدالة المعولية للتوزيع الاسي المختلط هو

$$\hat{R}_{Bayes}(t)=\int_P\int_{\theta_2}\int_{\theta_1}g\left(\theta_1,\theta_2,P/t_{1i},t_{2i}\right)R(t)d\theta_1d\theta_2dP \qquad \ldots (11)$$

وبعد تطبيق قاعدة كاما للتكامل نجد ان مقدر بيز لدالة المعولية للنوع الاول (الذي يتم فيه تحديد انتماء الوحدة) هو

$$\hat{R}_{Bayes}(t)=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}\right)^{n_1+c-1}\left(\sum_{i=1}^{n2}t_{2i}\right)^{n_2+c-1}\Gamma(n_1+1)\Gamma(n_2+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n_1}t_{1i}+t_1\right)^{n_1+c-1}\left(\sum_{i=1}^{n_2}t_{2i}+t_2\right)^{n_2+c-1}\Gamma(n_1+c-1)\Gamma(n_2+c-1)} \qquad \ldots (12)$$

وبالنسبة للنوع الثاني الذي لا يمكن عنده تحديد انتماء المفردة في العينة الى اي مجتمع تعود ولنفرض ان لدينا مجتمعين $k=2$ ، فان الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي t هي

$$f\left(t/\theta_1,\theta_2\right)=P\frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{t}{\theta_1}}+(1-P)\frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{t}{\theta_2}} \qquad \ldots (13)$$

وتعرف دالة المعولية

$$R(t)=PR_1(t)+(1-P)R_2(t)$$

$$R(t)=e^{-\frac{t}{\theta}}$$

ان خلط توزيعات اسية مختلفة في المعلمات ، سيظهر توزيع احتمالي جديد يسمى التوزيع الاسي المختلط كانموذج احتمالي للمجتمع الشاذ، ويستخدم هذا التوزيع لتمثيل معدلات الفشل المتغيره مع الزمن .

وفي حالة وجود k من المجتمعات الجزئية فان دالة التوزيع التراكمية (c.d.f) هي

$$F_{1,2,\ldots,k}(t) = \frac{n_1}{n} F_1(t) + \frac{n_2}{n} F_2(t) + \ldots + \frac{n_k}{n} F_k(t) \qquad \ldots \; (14)$$

حيث ان

$$F_i(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta_i}}$$

ومن هذه المعادلة نحسب دالة المعولية للتوزيع الاسي المختلط وهي

$$R_{1,2,\ldots,k}(t) = \frac{n_1}{n} R_1(t) + \frac{n_2}{n} R_2(t) + \ldots + \frac{n_k}{n} R_k(t) \qquad \ldots \; (15)$$

ونظرا لعدم امكانية تحديد انتماء المفردة فيمكننا ايجاد تقدير دالة المعولية من المعادلة

$$\hat{R}_{Bayes}(t) = P\hat{R}_1(t) + (1-P)\hat{R}_2(t)$$

والبحث عن قيمة P التي تجعل متوسط مربعات الخطأ اقل ما يمكن ، ومن تعريف الخطأ هو الفرق بين القيمة الحقيقية والتقديرية

$$\hat{R}(t) - R(t) = P\hat{R}_1(t) + (1-P)\hat{R}_2(t) - R(t) + PR(t) - PR(t)$$

$$\hat{R}(t) - R(t) = P\left(\hat{R}_1(t) - R(t)\right) + (1-P)\left(\hat{R}_2(t) - R(t)\right)$$

بعد تربيع الطرفين واخذ التوقع نحصل على

$$E\left[\hat{R}(t) - R(t)\right]^2 = P^2 E\left(\hat{R}_1(t) - R(t)\right)^2 + (1-P)^2 E\left(\hat{R}_2(t) - R(t)\right)^2 +$$

$$2P(1-P)E\left(\hat{R}_1(t) - R(t)\right)\left(\hat{R}_2(t) - R(t)\right)$$

$$MSE\left(\hat{R}(t)\right) = P^2 MSE\left(\hat{R}_1(t)\right) + (1-P)^2 MSE\left(\hat{R}_2(t)\right) + 2P(1-P)$$

$$E\left(\hat{R}_1(t) - R(t)\right)\left(\hat{R}_2(t) - R(t)\right)$$

ثم نشتق هذه الدالة بالنسبة لـ P ونساويها مع الصفر فنحصل على قيمة P

$$P = \frac{MSE(\hat{R}_2(t)) - E(\hat{R}_1(t)\hat{R}_2(t)) + R(t)E(\hat{R}_1(t)) + R(t)E(\hat{R}_2(t)) - R^2(t)}{MSE(\hat{R}_1(t)) + MSE(\hat{R}_2(t)) - 2E(\hat{R}_1(t)\hat{R}_2(t)) + 2R(t)E(\hat{R}_1(t)) + 2R(t)E(\hat{R}_2(t)) - 2\hat{R}(t)}$$

ونظرا لان هذه الصيغة معقدة ، سنحاول ايجاد مقدر المعولية للنوع الثاني من المجتمعات ، باعتماد طريقة الامكان الاعظم لتقدير θ_2, θ_1 و α (نسبة الخلط) ، ثم تعتمد المقدرات الناتجة من معادلات الامكان الاعظم في التوصل الى مقدر المعولية ، لان مقدرات الامكان الاعظم تتمتع بخاصية عدم التحيز invariant property ، وقبل الدخول في تفاصيل ايجاد مقدرات الامكان الاعظم لابد من تعريف دالة الكثافة الاحتمالية ودالة الامكان ، طبقا لهذا النوع من المجتمعات ، تكون دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) هي مشتقة دالة المعولية

$$f_{1,2,\ldots,k}(t) = -\frac{d}{dt}\left[R_{1,2,\ldots,k}(t)\right]$$

$$f_{1,2,\ldots,k}(t) = \frac{n_1}{n}\left[-\frac{d}{dt}[R_1(t)]\right] + \frac{n_2}{n}\left[-\frac{d}{dt}[R_2(t)]\right] + \ldots + \frac{n_k}{n}\left[-\frac{d}{dt}[R_k(t)]\right]$$

$$f_{1,2,\ldots,k}(t) = \frac{n_1}{n}\ f_1(t) + \frac{n_2}{n}\ f_2(t) + \ldots + \frac{n_k}{n}\ f_k(t)$$

وان المعولية الشرطية لمدة زمنية قادمة T_0 ، وهي تلك المعرفة بالمعادلة الاتية

$$R_{1,2,\ldots,k}(t,T_0) = \frac{\frac{n_1}{n} R_1(t+T_0) + \frac{n_2}{n} R_2(t+T_0) + \ldots + \frac{n_k}{n} R_k(t+T_0)}{\frac{n_1}{n} R_1(T_0) + \frac{n_2}{n} R_2(T_0) + \ldots + \frac{n_k}{n} R_k(T_0)} \ldots \quad (16)$$

وحيث ان الدالة التجميعية للتوزيع الاسي المختلط

$$F(t) = \alpha F_1(t) + (1-\alpha)F_2(t)$$

وان دالة المعولية هي

$$R(t) = \alpha R_1(t) + (1-\alpha)R_2(t)$$

$$= \alpha e^{-\frac{t}{\theta_1}} + (1-\alpha)e^{-\frac{t}{\theta_2}}$$

وسوف نطبق طريقة الامكان الاعظم لتقدير معلمات النموذج المختلط من مجتمعين جزئيين SP_1 و SP_2 بوجود معلمة نسبة الخلط ، وان هذه الطريقة تحتاج الى اسلوب تكراري للوصول الى المقدرات .

لتكن t_{ij} تمثل اوقات الفشل لعينة عشوائية بحجم n مسحوبة من مجتمع مختلط من توزيعين من نوع (exp) وفي حالة امكانية تحديد انتماء المفردة الى اي مجتمع جزئي (SPi) (i=1,2) يمكن ان نختار متغير عشوائي T يمثل الزمن الذي يتم من خلاله تحديد اوقات الفشل ri التي تفشل قبل Tوهي $(t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{ir1})$ بحيث ان $x_{ij} = \frac{t_{ij}}{T} \leq 1$ ، وبذلك تكون بيانات العينة المسحوبة هي بيانات مراقبة من النوع الاول وتكون دالة التوزيع الاحتمالية الشرطية لاوقات الفشل من المجتمع SPi والتي تفشل قبل الوقت T هي

$$f_i(t/t \leq T) = \frac{f_i(t)}{F_i(t)} \qquad 0 \leq t \leq T$$

ليكن احتمال فشل r_1 من وحدات المجتمع SP_1 التي تفشل قبل الوقت T ، و r_2 من وحدات المجتمع SP_2 تفشل قبل الوقت T و (n-r) هي الوحدات الباقية حتى الوقت T , هو

$$\frac{n!}{r_1!r_2!(n-r)!}[\alpha F_1(t)]^{r_1}[\beta F_2(t)]^{r_2}[R(t)]^{n-r} \quad , \beta = 1-\alpha, \quad r = r_1 + r_2$$

ان دالة الامكان الاعظم للعينة هي

$$L\left(\left(t_{11},t_{12},\ldots,t_{1r1},t_{21},t_{22},\ldots,t_{2r2}\right)/\alpha,\theta_1,\theta_2\right)=\frac{n!}{r_1!r_2!(n-r)!}\left[\alpha F_1(t)\right]^{r_1}$$

$$\left[\beta F_2(t)\right]^{r_2}\left[R(t)\right]^{n-r}\frac{\prod_{j=1}^{r_1} f_1\left(t_{1j}\right)}{\left[F_1(t)\right]^{r_1}}\frac{\prod_{j=1}^{r_2} f_2\left(t_{2j}\right)}{\left[F_2(t)\right]^{r_2}}$$

$$L=k\alpha^{r_1}\beta^{r_2}\left[\alpha e^{-\frac{T}{\theta_1}}+\beta e^{-\frac{T}{\theta_2}}\right]^{n-r}\frac{1}{\theta_1^{r_1}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{r_1}t_{1i}}{\theta_1}}\frac{1}{\theta_2^{r_2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{r_2}t_{2i}}{\theta_2}}$$

$$\ln L=\ln k+r_1\ln\alpha+r_2\ln\beta+(n-r)\left[\alpha e^{-\frac{T}{\theta_1}}+\beta e^{-\frac{T}{\theta_2}}\right]^{n-r}-r_1\ln\theta_1$$

$$-\frac{\sum_{i=1}^{r_1}t_{1i}}{\theta_1}-r_1\ln\theta_2--\frac{\sum_{i=1}^{r_2}t_{2i}}{\theta_2} \qquad \ldots\ (17)$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_1}=(n-r)\frac{1}{\left(\alpha e^{-\frac{T}{\theta_1}}+\beta e^{-\frac{T}{\theta_2}}\right)^{n-r}}\left(\alpha e^{-\frac{T}{\theta_1}}\frac{T}{\theta_1^2}\right)-\frac{r_1}{\theta_1}+\frac{\sum_{i=1}^{r_1}t_{1i}}{\theta_1^2} \qquad \ldots\ (18)$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_2}=(n-r)\frac{1}{\left(\alpha e^{-\frac{T}{\theta_1}}+\beta e^{-\frac{T}{\theta_2}}\right)^{n-r}}\left(\beta e^{-\frac{T}{\theta_2}}\frac{T}{\theta_2^2}\right)-\frac{r_2}{\theta_2}+\frac{\sum_{i=1}^{r_2}t_{2i}}{\theta_2^2} \qquad \ldots\ (19)$$

لنفرض ان

$$H=\frac{\alpha e^{-\frac{T}{\theta_1}}}{\alpha e^{-\frac{T}{\theta_1}}+\beta e^{-\frac{T}{\theta_2}}} \qquad \ldots\ (20)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = (n-r)H\,\frac{T}{\theta_1^2} - \frac{r_1}{\theta_1} + \frac{\sum_{i=1}^{r_1} t_{1i}}{\theta_1^2}$$

وحيث ان المقدار

$$\frac{\beta e^{-\frac{T}{\theta_2}}}{\alpha e^{-\frac{T}{\theta_1}} + \beta e^{-\frac{T}{\theta_2}}} = 1 - H \qquad \ldots\ (21)$$

فان

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = (n-r)(1-H)\frac{T}{\theta_2^2} - \frac{r_2}{\theta_2} + \frac{\sum_{i=1}^{r_2} t_{2i}}{\theta_2^2}$$

وعند وضع $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1}$ تساوي صفر نحصل على المعادلة الاتية

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\hat{H}T(n-r) + \sum_{i=1}^{r_1} t_{1i}}{r_1} \qquad \ldots\ (22)$$

وعند وضع $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2}$ تساوي صفر فان

$$\hat{\theta}_2 = \frac{(n-r)(1-\hat{H})T + \sum_{i=1}^{r_2} t_{2i}}{r_2} \qquad \ldots\ (23)$$

واخيرا نشتق المعادلة (17) بالنسبة الى معلمة نسبة الخلط α

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{r_1}{\alpha} - \frac{r_2}{\beta} + (n-r)\left[\frac{e^{-\frac{T_1}{\theta_1}} - e^{-\frac{T_2}{\theta_2}}}{\alpha e^{-\frac{T_1}{\theta_1}} + \beta e^{-\frac{T_2}{\theta_2}}}\right]$$

$$= r_1\beta\left(\alpha e^{-\frac{T_1}{\theta_1}} + \beta e - \frac{T_2}{\theta_2}\right) - r_2\alpha\left(\alpha e^{-\frac{T_1}{\theta_1}} + \beta e^{-\frac{T_2}{\theta_2}}\right) + (n-r)\left(e^{--\frac{T_1}{\theta_1}} - e^{-\frac{T_2}{\theta_2}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{r_1 H}{\alpha} + \frac{r_1(1-H)}{\alpha} - \frac{r_2 H}{\beta} - \frac{r_2(1-H)}{\beta} + \frac{(n-r)H}{\alpha} - \frac{(n-r)(1-H)}{\beta} = 0$$

بعد اجراء سلسلة من التبسيطات تكون قيمة نسبة الخلط التقديرية هي

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{H}(n-r) + r_1}{r_1 + (n-r) + r_2}$$

$$\hat{\alpha} = \hat{H}\left(\frac{n-r}{n}\right) + \frac{r_1}{n} \qquad \dots (24)$$

ومن المعادلة (20) نحصل على

$$\hat{H} = \frac{1}{1 + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} \exp\left\{\frac{T}{\theta_1} - \frac{T}{\theta_2}\right\}} \qquad \dots (25)$$

ولايجاد مقدرات الامكان الاعظم لكل من معلمتي القياس θ_1 و θ_2 ومعلمة نسبة الخلط α يتم

تعويض القيم الافتراضية $(\overset{*}{\alpha}, \overset{*}{\beta} = 1 - \overset{*}{\alpha}, \overset{*}{\theta}_1, \overset{*}{\theta}_2)$ لايجاد قيمة H ، وباستخدام طريقة البحث المباشر Direct search ، والهدف من البحث المباشر هو تحقيق المعادلة

$$g(\hat{H}_0) - \hat{H} = 0$$

حيث ان

$$g(\hat{H}_0) = \frac{1}{1 + V_0} \qquad \dots (26)$$

$$V_0 = \frac{1 - \hat{\alpha}_0}{\hat{\alpha}_0} \exp\left\{\frac{1}{\hat{\theta}_1} - \frac{1}{\hat{\theta}_2}\right\} \qquad \dots (27)$$

والسبب في التبسيط يعود الى استخدام دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي المبتور

$$f(y / y \le 1) = \frac{\frac{1}{\lambda_i} e^{-\frac{y_i}{\lambda_i}}}{1 - e^{-\frac{1}{\lambda_i}}} \qquad \dots (28)$$

علما بان

$$\lambda_1 = \frac{\hat{H}(n-r)}{r_1} + \bar{y}_1 \qquad \dots (29)$$

وبتطبيق المعادلة (28) فان مقدر الامكان الاعظم للمعلمة λ_1 هو حل للمعادلة (29)

$$(\lambda_i - \bar{y}_i)\left\{\exp\left(\frac{1}{\lambda_i} - 1\right)\right\} = 0 \qquad \dots (30)$$

نختار $\bar{y}$ الاصغر ، فاذا كانت $\bar{y}_1$ هي الاصغر ، نحصل على اول قيمة مقدرة للمعلمة $\hat{\lambda}$ هي $\hat{\lambda}_{01}$ من المعادلة (30) ثم نعوض $\hat{H}_0$ الناتجة من المعادلة (29) للحصول على $\hat{\lambda}_{02}$ من المعادلة (31) وكذلك $\hat{\alpha}_0$ من المعادلة (24) علما بان

$$\lambda_2 = \frac{(n-r)(1-\hat{H})}{r_2} + \bar{y}_2 \qquad \dots (31)$$

حيث ان

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{r_i} t_{ji}}{r_i}$$

ثم نعوض قيم $\hat{\lambda}_{01}$ ، $\hat{\lambda}_{02}$ و $\hat{\alpha}_0$ في المعادلة الاتية

$$V_0 = \frac{1-\hat{\alpha}_0}{\hat{\alpha}_0} \exp\left\{\frac{1}{\hat{\lambda}_{01}} - \frac{1}{\hat{\lambda}_{02}}\right\} \qquad \dots (32)$$

وبتعويض قيمة V_0 في الصيغة (26) نحصل على قيمة $g(\hat{H}_0)$ ، ومنها نجد

$$D_0 = g(\hat{H}_0) - \hat{H}_0$$

فاذا كانت D_0 صفر تكون المقدرات السابقة $\hat{\lambda}_{01}$ ، $\hat{\lambda}_{02}$ و $\hat{\alpha}_0$ هي MLE واذا كانت $D_0 \neq 0$ نعيد الحسابات التكرارية للوصول الى مقدرات الامكان الاعظم ، وبما ان مقدرات الامكان الاعظم تتصف بخاصية الثبات ، اي اذا كانت $(\hat{\theta}_{1ML}, \hat{\theta}_{2ML}, \hat{\alpha}_{ML})$ هي مقدرات الامكان الاعظم للمعلمات θ_1 و θ_2 و α فمن الممكن استخدام هذه الخاصية في الحصول على مقدر الامكان الاعظم لدالة المعولية للتوزيع الاسي المختلط لمجتمعين جزئيين وهي

$$\hat{R}_{ML}(t) = \hat{\alpha} e^{-\frac{t}{\hat{\theta}_1}} + (1-\hat{\alpha}) e^{-\frac{t}{\hat{\theta}_2}}$$

ومما تجدر الاشارة اليه ان t_j تمثل اوقات الفشل لكل مجتمع جزئي والتي تفشل قبل الوقت T

T : الزمن الذي يتم من خلاله تحديد اوقات الفشل t_j

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$$

هي الفترات الزمنية التي يتم من خلالها تحديد اعداد المشاهدات لكل مجتمع جزئي

m : العدد الكلي للفترات الزمنية ضمن الفترة (0,T) و $\alpha = \frac{r_i}{r}$ معلمة الخلط و θ_i معلمة القياس .
وسوف يتم توضيح كل من هذه الرموز في الجانب التجريبي من البحث.

3. الجانب التجريبي

تم صياغة انموذج المحاكاة لاجراء المقارنة بين مقدري بيز و الامكان الاعظم لدالة المعولية للتوزيع الاسي المختلط من مجتمعين ، ويتضمن جانب المحاكاة تحديد القيم الافتراضية ، حيث تشمل هذه المرحلة اختيار حجم العينة n (اختيرت ثلاث قيم افتراضية هي n=50,100,200) ولدينا مجتمعين جزئيين وبيانات مراقبة من النوع الاول ، ثم يتم اختيار معلمة نسبة الخلط α (ايضا نختار ثلاث قيم هي $\alpha = 0.2,0.4,0.5$) للحصول على التنوع في حجوم العينات الجزئية (الصغيرة والمتوسطة والكبيرة) حيث ان $(r_1 = \alpha_n)$ ، لكي نرى تاثير تغير معلمة نسبة الخلط على طرائق التقدير ، وفيما يلي جدول بالقيم الافتراضية لاحجام العينات واحجام العينات الجزئية

جدول (1) يبين القيم الافتراضية لاحجام العينات واحجام العينات الجزئية

α	0.2	0.4	0.5
r	50	100	200
r_1	10	40	100

ثم يتم اختيار زمن المراقبة T (Predetermined Sensory Time) حيث سنختار قيمتان افتراضيتان لزمن المراقبة T لكل نموذج من النماذج المختارة ، لكي نرى تاثير التغير في زمن المراقبة على تقدير دالة المعولية بالطريقتين

جدول (2) يبين القيم الافتراضية المراقبة T

النماذج	T	
I	2	4
II	4	5
III	3	4

ثم نختار القيم الافتراضية لمعلمتي القياس θ_1 و θ_2 وكما مبينة في الجدول (3)

جدول (3) يبين القيم الافتراضية لمعلمات التوزيع الاسي المختلط لمجتمعين جزئيين

النماذج	θ_1	θ_2
I	2	3
II	4	3
III	5	4

المرحلة الثانية بعد ذلك هي مرحلة توليد البيانات فقد تم توليد مشاهدات عشوائية تخضع للتوزيع الاسي لكل مجتمع جزئي بتطبيق طريقة التحويل المعكوس لدالة التوزيع التراكمية، من خلال مساواة دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الاسي بقيمة مشاهدة مولدة من قبل الحاسبة تتبع التوزيع المنتظم على الفترة (0,1) وحسب الصيغة الاتية

$$t_{1i} = \theta_{1i}\left(-\ln(1-ui)\right)$$
$$t_{2i} = \theta_{2i}\left(-\ln(1-ui)\right)$$

حيث تمثل ui متغير مستمر منتظم

بعد توليد البيانات وتقدير θ_1 و θ_2 و α تقدر دالة المعولية وتتم المقارنة بين المقدرات بواسطة متوسط مربعات الخطأ (MSE)

$$MSE(\hat{R}) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left(\hat{R}_i - R\right)^2$$

حيث L عدد التكرارات لكل تجربة

4. نتائج المحاكاة

جدول (4) يبين قيم معدل تقدير المعلمات للنموذج الاول

α	n	T	$\hat{\theta}_{1ML}$	$\hat{\theta}_{2ML}$	$\hat{\alpha}$
0.2	50	2	1.3752	2.2293	0.2032
		4	0.7852	1.4973	0.2018
	100	2	0.9349	2.4359	0.3660
		4	0.5281	1.5841	0.3892
	200	2	0.8075	2.6518	0.4406
		4	0.4514	1.6936	0.4789
0.4	50	2	1.8947	2.0630	0.2340
		4	0.9942	1.4351	0.2107
	100	2	1.2162	2.1903	0.4009
		4	0.6641	1.4765	0.4008
	200	2	1.0303	2.3609	0.4754
		4	0.5642	1.5606	0.4910
0.5	50	2	2.3153	1.9284	0.2591
		4	1.1582	1.3863	0.2177
	100	2	1.4184	2.0136	0.4259
		4	0.7633	1.3979	0.4094
	200	2	1.1854	2.1583	0.4997
		4	0.6444	1.4661	0.4996

جدول (5) يبين قيم معدل تقدير المعلمات للنموذج الثاني

α	n	T	$\hat{\theta}_{1ML}$	$\hat{\theta}_{2ML}$	$\hat{\alpha}$
0.2	50	4	2.7411	1.4915	0.2018
		5	2.3919	1.2300	0.2021
	100	4	2.0009	1.7194	0.3737
		5	1.7536	1.3964	0.3819
	200	4	1.8111	1.9435	0.4556
		5	1.6002	1.5764	0.4682
	50	4	3.5286	1.3307	0.2249
		5	2.9896	1.1032	0.2182

0.4	100	4	2.4306	1.4759	0.4002
		5	2.0881	1.2013	0.4007
	200	4	2.1591	1.6461	0.4828
		5	1.8746	1.3360	0.4767
0.5	50	4	4.0868	1.2167	0.2413
		5	3.4069	1.0146	0.2295
	100	4	2.7048	1.3205	0.4172
		5	2.2995	1.0780	0.4125
	200	4	2.3748	1.4617	0.4997
		5	2.0432	1.1883	0.4996

جدول (6) يبين قيم معدل تقدير المعلمات للنموذج الثالث

α	n	T	$\hat{\theta}_{1ML}$	$\hat{\theta}_{2ML}$	$\hat{\alpha}$
0.2	50	3	4.6334	2.8388	0.2015
		4	3.8966	2.4211	0.2018
	100	3	2.9994	3.2661	0.3495
		4	2.7238	2.7867	0.3636
	200	3	2.6430	3.6896	0.4180
		4	2.4470	3.1536	0.4386
0.4	50	3	6.5220	2.4835	0.2495
		4	5.2281	2.1508	0.2350
	100	3	3.8643	2.7826	0.3994
		4	3.4058	2.3942	0.4002
	200	3	3.3204	3.1144	0.4679
		4	2.9963	2.6783	0.4758
0.5	50	3	7.8926	2.2257	0.2844
		4	6.1961	1.9544	0.2592
	100	3	4.4274	2.4678	0.4319
		4	3.8492	2.1390	0.4240
	200	3	3.7492	2.7502	0.4995
		4	3.3431	2.3781	0.4993

جدول (7) يبين متوسط مربعات الخطأ لتقدير المعلمات للنموذج الاول

α	n	T	$\hat{\theta}_{1ML}$	$\hat{\theta}_{2ML}$	$\hat{\alpha}$
0.2	50	2	0.7032	1.0986	0.0023
		4	1.5339	2.5357	0.0009
	100	2	1.1771	0.6347	0.0007
		4	2.1802	2.1697	0.0019
	200	2	1.4359	0.3375	0.0015
		4	2.4038	1.8150	0.0007
0.4	50	2	0.6091	1.3102	0.0024
		4	1.1098	2.7034	0.0009
	100	2	0.6853	0.9111	0.0006

		4	1.8066	2.4640	0.0018
	200	2	0.9624	0.5802	0.0014
		4	2.0704	2.1636	0.0007
0.5	50	2	0.3957	0.3391	0.0010
		4	0.8456	2.8412	0.0009
	100	2	0.4340	1.1886	0.0006
		4	1.5586	2.6944	0.0018
	200	2	0.6928	0.8521	0.0014
		4	1.8493	2.4339	0.0007

جدول (8) يبين متوسط مربعات الخطأ لتقدير المعلمات للنموذج الثاني

α	n	T	$\hat{\theta}_{1ML}$	$\hat{\theta}_{2ML}$	$\hat{\alpha}$
0.2	50	4	3.3564	2.5038	0.0014
		5	3.7179	3.2994	0.0008
	100	4	4.2575	1.7722	0.0012
		5	5.2575	2.6719	0.0018
	200	4	4.8867	1.2082	0.0009
		5	5.8383	2.0931	0.0019
0.4	50	4	3.2122	2.9687	0.0013
		5	2.8121	3.7319	0.0008
	100	4	2.8460	2.4199	0.0012
		5	3.9503	3.3092	0.0019
	200	4	3.5242	1.8988	0.0009
		5	4.6261	2.8161	0.0012
0.5	50	4	4.0550	3.3329	0.0012
		5	2.7096	4.0551	0.0008
	100	4	2.1510	2.8980	0.0012
		5	3.2498	3.7534	0.0020
	200	4	2.8049	2.4181	0.0008
		5	3.9584	3.3196	0.0011

جدول (9) يبين متوسط مربعات الخطأ لتقدير المعلمات للنموذج الثالث

α	n	T	$\hat{\theta}_{1ML}$	$\hat{\theta}_{2ML}$	$\hat{\alpha}$
0.2	50	3	9.3576	2.0465	0.0013
		4	5.5785	3.0003	0.0024
	100	3	4.6668	1.0383	0.0008
		4	5.6496	1.8091	0.0006
	200	3	5.7608	0.4313	0.0013
		4	6.6840	0.9423	0.0016
0.4	50	3	20.1348	2.8364	0.0020
		4	7.8747	3.8205	0.0024
	100	3	2.3766	1.8439	0.0008
		4	3.2607	2.8263	0.0006

	200	3	3.1434	1.0227	0.0013
		4	4.2623	1.9094	0.0014
0.5	50	3	34.1613	3.5806	0.0025
		4	12.4200	4.5162	0.0023
	100	3	1.7471	2.6321	0.0009
		4	2.2360	3.6607	0.0006
	200	3	1.9760	1.7480	0.0013
		4	3.0533	2.7584	0.0013

جدول (10) يبين قيم معدل تقدير المعولية للنموذج الاول

α	n	T	$\hat{R}_{1ML}$	$\hat{R}_{2ML}$
0.2	50	2	0.2213	0.3901
		4	0.1184	0.4293
	100	2	0.0011	0.0835
		4	0.0850	0.4638
	200	2	0.0003	0.0958
		4	0.3261	0.3628
0.4	50	2	0.0240	0.0688
		4	0.1906	0.3913
	100	2	0.0038	0.0706
		4	0.1433	0.4224
	200	2	0.0013	0.0791
		4	0.3957	0.3391
0.5	50	2	0.0384	0.0633
		4	0.2396	0.3618
	100	2	0.2396	0.0618
		4	0.0074	0.0615
	200	2	0.1840	0.3900
		4	0.0027	0.0677

جدول (11) يبين قيم معدل تقدير المعولية للنموذج الثاني

α	n	T	$\hat{R}_{1ML}$	$\hat{R}_{2ML}$
0.2	50	4	0.2167	0.0742
		5	0.1247	0.0241
	100	4	0.1355	0.0994
		5	0.0622	0.0317
	200	4	0.1105	0.1279
		5	0.0462	0.0562
0.4	50	4	0.2952	0.0742
		5	0.1798	0.0167
	100	4	0.1897	0.0693
		5	0.0941	0.0189
	200	4	0.1562	0.0891

		5	0.0713	0.0257
0.5	50	4	0.3439	0.0444
		5	0.2167	0.0123
	100	4	0.2228	0.0516
		5	0.1153	0.0125
	200	4	0.1842	0.0663
		5	0.0880	0.0166

جدول (12) يبين قيم معدل تقدير المعولية للنموذج الثالث

α	n	T	$\hat{R}_{1ML}$	$\hat{R}_{2ML}$
0.2	50	3	0.4656	0.3341
		4	0.3250	0.1879
	100	3	0.3555	0.3903
		4	0.2251	0.2341
	200	3	0.3169	0.4384
		4	0.1935	0.2784
0.4	50	3	0.5751	0.2877
		4	0.4246	0.1546
	100	3	0.4456	0.3328
		4	0.3004	0.1861
	200	3	0.3995	0.3771
		4	0.2601	0.2227
0.5	50	3	0.6308	0.2510
		4	0.4818	0.1300
	100	3	0.4928	0.2903
		4	0.3437	0.1534
	200	3	0.4432	0.3320
		4	0.2984	0.1849

جدول (13) يبين متوسط مربعات الخطأ لتقدير المعولية للنموذج الاول

α	n	T	$\hat{R}_{1ML}$	$\hat{R}_{2ML}$
0.2	50	2	0.0342	0.0263
		4	0.0159	0.0390
	100	2	0.0651	0.0136
		4	0.0180	0.0349
	200	2	0.0809	0.0062
		4	0.0182	0.0299
0.4	50	2	0.0165	0.0338
		4	0.0131	0.0412
	100	2	0.0358	0.0215
		4	0.0173	0.0392
	200	2	0.0520	0.0122
		4	0.0180	0.0354

0.5	50	2	0.0154	0.0414
		4	0.0108	0.0431
	100	2	0.0215	0.0298
		4	0.0164	0.0425
	200	2	0.0357	0.0192
		4	0.0176	0.0395

جدول (14) يبين متوسط مربعات الخطأ لتقدير المعولية للنموذج الثاني

α	n	T	$\hat{R}_{1ML}$	$\hat{R}_{2ML}$
0.2	50	4	0.0392	0.0390
		5	0.0357	0.0278
	100	4	0.0582	0.0291
		5	0.0251	0.0252
	200	4	0.0679	0.0200
		5	0.0583	0.0215
0.4	50	4	0.0247	0.0452
		5	0.0249	0.0300
	100	4	0.0375	0.0391
		5	0.0399	0.0291
	200	4	0.0471	0.0315
		5	0.0473	0.0269
0.5	50	4	0.0208	0.0497
		5	0.0207	0.0314
	100	4	0.0276	0.0459
		5	0.0330	0.0312
	200	4	0.0364	0.0397
		5	0.0407	0.0298

جدول (15) يبين متوسط مربعات الخطأ لتقدير المعولية للنموذج الثالث

α	n	T	$\hat{R}_{1ML}$	$\hat{R}_{2ML}$
0.2	50	3	0.0308	0.0293
		4	0.0361	0.0398
	100	3	0.0460	0.0126
		4	0.0566	0.0225
	200	3	0.0575	0.0042
		4	0.0681	0.0108
0.4	50	3	0.0194	0.0438
		4	0.0209	0.0517
	100	3	0.0189	0.0253
		4	0.0295	0.0370
	200	3	0.0260	0.0123
		4	0.0390	0.0235
	50	3	0.0223	0.0581

0.5		4	0.0201	0.0618
	100	3	0.0108	0.0387
		4	0.0187	0.0493
	200	3	0.0148	0.0229
		4	0.0262	0.0356

جدول (16) يبين قيم معدل تقدير المعولية للنموذج الاول عندما (T=2)

n	ti	$\hat{R}_{Bayes}$		
		C=1	C=2	C=3
50	0.5	1.0394×10^{-3}	9.9014×10^{-5}	5.1236×10^{-9}
	1.0	3.9503×10^{-4}	3.5256×10^{-5}	1.7446×10^{-9}
	1.5	1.5542×10^{-4}	1.3168×10^{-5}	6.1867×10^{-10}
	2.0	6.3038×10^{-5}	5.0824×10^{-6}	2.2730×10^{-10}
	2.5	2.6275×10^{-5}	2.0202×10^{-6}	8.6085×10^{-11}
	3.0	1.1226×10^{-5}	8.2467×10^{-7}	3.3622×10^{-11}
	3.5	4.9058×10^{-6}	3.4491×10^{-7}	1.3461×10^{-11}
	4.0	2.1891×10^{-6}	1.4752×10^{-7}	5.5194×10^{-12}
	4.5	9.9596×10^{-7}	6.4412×10^{-8}	2.3136×10^{-12}
	5.0	4.6138×10^{-7}	2.8634×10^{-8}	9.8992×10^{-13}
	5.5	2.1738×10^{-7}	1.2997×10^{-8}	4.3177×10^{-13}
100	0.5	1.3300×10^{-4}	3.2461×10^{-6}	2.1120×10^{-11}
	1.0	4.1994×10^{-5}	1.0016×10^{-6}	6.3681×10^{-12}
	1.5	1.3632×10^{-5}	3.1798×10^{-7}	1.9771×10^{-12}
	2.0	4.5378×10^{-6}	1.0358×10^{-7}	6.3022×10^{-13}
	2.5	1.5456×10^{-6}	3.4543×10^{-8}	2.0581×10^{-13}
	3.0	5.3780×10^{-7}	1.1775×10^{-8}	6.8728×10^{-14}
	3.5	1.9089×10^{-7}	4.0962×10^{-9}	2.3435×10^{-14}
	4.0	6.9028×10^{-8}	1.4524×10^{-9}	8.1480×10^{-15}

	4.5	2.5402×10^{-8}	5.2431×10^{-10}	2.8853×10^{-15}
	5.0	9.5042×10^{-9}	1.9249×10^{-10}	1.0395×10^{-15}
	5.5	3.6118×10^{-9}	7.1806×10^{-11}	3.8065×10^{-16}
200	0.5	2.7245×10^{-5}	2.6889×10^{-7}	2.6015×10^{-13}
	1.0	7.4180×10^{-6}	7.2276×10^{-8}	6.9038×10^{-14}
	1.5	2.05621×10^{-6}	1.9783×10^{-8}	1.8659×10^{-14}
	2.0	5.7952×10^{-7}	5.5072×10^{-9}	5.1304×10^{-15}
	2.5	1.6590×10^{-7}	1.5575×10^{-9}	1.4334×10^{-15}
	3.0	4.8199×10^{-8}	4.4710×10^{-10}	4.0658×10^{-16}
	3.5	1.4200×10^{-8}	1.3018×10^{-10}	1.1699×10^{-16}
	4.0	4.2398×10^{-9}	3.8418×10^{-11}	3.4127×10^{-17}
	4.5	1.2821×10^{-9}	1.1485×10^{-11}	1.0086×10^{-17}
	5.0	3.9250×10^{-10}	3.4763×10^{-12}	3.0184×10^{-18}
	5.5	1.2158×10^{-10}	1.0648×10^{-12}	9.1425×10^{-19}

جدول (17) يبين قيم معدل تقدير المعولية للنموذج الاول عندما (T=4)

n	ti	$\hat{R}_{Bayes}$		
		C=1	C=2	C=3
50	0.5	1.5599×10^{-3}	1.4994×10^{-4}	7.9903×10^{-9}
	1.0	8.7158×10^{-4}	8.0729×10^{-5}	4.1459×10^{-9}
	1.5	4.9567×10^{-4}	4.4323×10^{-5}	2.1980×10^{-9}
	2.0	2.8633×10^{-4}	2.4758×10^{-5}	1.1875×10^{-9}
	2.5	1.6774×10^{-5}	1.4044×10^{-5}	6.5240×10^{-10}
	3.0	9.9527×10^{-5}	8.0784×10^{-6}	3.6390×10^{-10}
	3.5	5.075×10^{-5}	4.7066×10^{-6}	2.0581×10^{-10}
	4.0	3.6261×10^{-5}	2.7746×10^{-6}	1.1788×10^{-10}
	4.5	2.2228×10^{-5}	1.6536×10^{-6}	6.8323×10^{-11}
	5.0	1.3755×10^{-6}	9.9559×10^{-7}	4.0034×10^{-11}
	5.5	8.5860×10^{-6}	6.0517×10^{-7}	2.3701×10^{-11}
100	0.5	2.3696×10^{-4}	5.8495×10^{-6}	3.8492×10^{-11}
	1.0	4.3008×10^{-4}	3.1715×10^{-6}	2.0612×10^{-11}
	1.5	7.1880×10^{-5}	1.7312×10^{-6}	1.1114×10^{-11}
	2.0	3.9972×10^{-5}	9.5112×10^{-7}	6.0334×10^{-12}
	2.5	2.2364×10^{-5}	5.2590×10^{-7}	3.2965×10^{-12}
	3.0	1.2587×10^{-5}	2.9254×10^{-7}	1.8124×10^{-12}
	3.5	7.1249×10^{-6}	1.6369×10^{-7}	1.0025×10^{-12}
	4.0	4.0554×10^{-6}	9.2114×10^{-8}	5.5775×10^{-13}
	4.5	2.3208×10^{-6}	5.2124×10^{-8}	3.1208×10^{-13}

	5.0	1.3351×10^{-6}	2.9653×10^{-8}	1.7558×10^{-13}
	5.5	7.7191×10^{-7}	1.6957×10^{-8}	9.9312×10^{-14}
200	0.5	5.3522×10^{-5}	5.3179×10^{-7}	5.1796×10^{-13}
	1.0	2.8184×10^{-5}	2.7825×10^{-7}	2.6929×10^{-13}
	1.5	1.4898×10^{-5}	1.4615×10^{-7}	1.4055×10^{-13}
	2.0	7.9036×10^{-6}	7.7050×10^{-8}	7.3634×10^{-14}
	2.5	4.2082×10^{-6}	4.0770×10^{-8}	3.8721×10^{-14}
	3.0	2.2486×10^{-6}	2.1651×10^{-8}	2.0436×10^{-14}
	3.5	1.2057×10^{-6}	1.1538×10^{-8}	1.0824×10^{-14}
	4.0	6.4873×10^{-7}	6.1705×10^{-9}	5.7535×10^{-15}
	4.5	3.5021×10^{-7}	3.3110×10^{-9}	3.0687×10^{-15}
	5.0	1.8969×10^{-7}	1.7826×10^{-9}	1.6423×10^{-15}
	5.5	1.0307×10^{-7}	9.6290×10^{-10}	8.8183×10^{-16}

جدول (18) يبين قيم معدل تقدير المعولية للنموذج الثاني عندما (T=4)

n	ti	$\hat{R}_{Bayes}$		
		C=1	C=2	C=3
50	0.5	1.7246×10^{-3}	1.6741×10^{-4}	9.0078×10^{-9}
	1.0	1.0549×10^{-3}	9.9497×10^{-5}	5.2025×10^{-9}
	1.5	6.5143×10^{-4}	5.9758×10^{-5}	3.0391×10^{-9}
	2.0	4.0587×10^{-4}	3.6239×10^{-5}	1.7940×10^{-9}
	2.5	2.5499×10^{-4}	2.2176×10^{-5}	1.0694×10^{-9}
	3.0	1.6146×10^{-4}	1.3686×10^{-5}	6.4336×10^{-10}
	3.5	1.0299×10^{-4}	8.5144×10^{-6}	3.9041×10^{-10}
	4.0	6.6161×10^{-5}	5.3374×10^{-6}	2.3885×10^{-10}
	4.5	4.2787×10^{-5}	3.3702×10^{-6}	1.4727×10^{-10}
	5.0	2.7848×10^{-5}	2.1427×10^{-6}	9.1474×10^{-11}
	5.5	1.8236×10^{-5}	1.3713×10^{-6}	5.7220×10^{-11}
100	0.5	2.4654×10^{-4}	6.0921×10^{-6}	4.0128×10^{-11}
	1.0	1.4076×10^{-4}	3.4386×10^{-6}	2.2392×10^{-11}
	1.5	8.0854×10^{-5}	1.9531×10^{-6}	1.2576×10^{-11}
	2.0	4.6714×10^{-5}	1.1160×10^{-6}	7.1063×10^{-12}
	2.5	2.7141×10^{-5}	6.4130×10^{-7}	4.0393×10^{-12}
	3.0	1.5853×10^{-5}	3.7055×10^{-7}	2.3089×10^{-12}
	3.5	9.3069×10^{-6}	2.1524×10^{-7}	1.3269×10^{-12}
	4.0	5.4910×10^{-6}	1.2566×10^{-7}	7.6655×10^{-13}
	4.5	3.2552×10^{-6}	7.3719×10^{-8}	4.4505×10^{-13}
	5.0	1.9386×10^{-6}	4.3453×10^{-8}	2.5965×10^{-13}

	5.5	1.1597×10^{-6}	2.5731×10^{-8}	1.5219×10^{-13}
200	0.5	5.4759×10^{-5}	5.4420×10^{-7}	5.3017×10^{-13}
	1.0	2.9506×10^{-5}	2.9143×10^{-7}	2.8218×10^{-13}
	1.5	1.5960×10^{-5}	1.5668×10^{-7}	1.5078×10^{-13}
	2.0	8.6648×10^{-6}	8.4551×10^{-8}	8.0878×10^{-14}
	2.5	4.7214×10^{-6}	4.5795×10^{-8}	4.3544×10^{-14}
	3.0	2.5816×10^{-6}	2.4893×10^{-8}	2.3529×10^{-14}
	3.5	1.4165×10^{-6}	1.3578×10^{-8}	1.2758×10^{-14}
	4.0	7.7980×10^{-7}	7.4310×10^{-9}	6.9419×10^{-15}
	4.5	4.3068×10^{-7}	4.0804×10^{-9}	3.7898×10^{-15}
	5.0	2.3863×10^{-7}	2.2478×10^{-9}	2.0757×10^{-15}
	5.5	1.3263×10^{-7}	1.2422×10^{-9}	1.1405×10^{-15}

جدول (19) يبين قيم معدل تقدير المعولية للنموذج الثاني عندما (T=5)

n	ti	$\hat{R}_{Bayes}$		
		C=1	C=2	C=3
50	0.5	1.8375×10^{-3}	1.7898×10^{-4}	9.6637×10^{-9}
	1.0	1.1950×10^{-3}	1.1347×10^{-4}	5.9732×10^{-9}
	1.5	7.8321×10^{-4}	7.2556×10^{-5}	3.7264×10^{-9}
	2.0	5.1753×10^{-4}	4.6761×10^{-5}	2.3449×10^{-9}
	2.5	3.4363×10^{-4}	3.0361×10^{-5}	1.4878×10^{-9}
	3.0	2.2986×10^{-4}	1.9851×10^{-5}	9.5070×10^{-10}
	3.5	1.5469×10^{-4}	1.3065×10^{-5}	6.1200×10^{-10}
	4.0	1.0471×10^{-4}	8.6528×10^{-6}	3.9663×10^{-10}
	4.5	7.1265×10^{-5}	5.7649×10^{-6}	2.5871×10^{-10}
	5.0	4.8960×10^{-5}	3.8628×10^{-6}	1.6978×10^{-10}
	5.5	3.3530×10^{-5}	2.6024×10^{-6}	1.1208×10^{-10}
100	0.5	2.7235×10^{-4}	6.7433×10^{-6}	4.4506×10^{-11}
	1.0	1.7135×10^{-4}	4.2024×10^{-6}	2.7473×10^{-11}
	1.5	1.0822×10^{-4}	2.6292×10^{-6}	1.7027×10^{-11}
	2.0	6.8601×10^{-5}	1.6512×10^{-6}	1.0594×10^{-11}
	2.5	4.3641×10^{-5}	1.0408×10^{-6}	6.6165×10^{-12}
	3.0	2.7859×10^{-5}	6.5836×10^{-7}	4.1474×10^{-12}
	3.5	1.7844×10^{-5}	4.1789×10^{-7}	2.6089×10^{-12}
	4.0	1.1466×10^{-5}	2.6614×10^{-7}	1.6467×10^{-12}
	4.5	7.3914×10^{-6}	1.7005×10^{-7}	1.0429×10^{-12}
	5.0	4.7795×10^{-6}	1.0900×10^{-7}	6.6263×10^{-13}

	5.5	3.1000×10^{-6}	7.0081	4.2236×10^{-13}
200	0.5	6.2130×10^{-5}	6.1823×10^{-7}	6.0305×10^{-13}
	1.0	3.7922×10^{-5}	3.7549×10^{-7}	3.6448×10^{-13}
	1.5	2.3199×10^{-5}	2.2859×10^{-7}	2.2081×10^{-13}
	2.0	1.4224×10^{-5}	1.3948×10^{-7}	1.3408×10^{-13}
	2.5	8.7406×10^{-6}	8.5295×10^{-8}	8.1596×10^{-14}
	3.0	8.3825×10^{-6}	5.2274×10^{-8}	4.9768×10^{-14}
	3.5	3.3226×10^{-6}	3.2106×10^{-8}	3.0421×10^{-14}
	4.0	2.0540×10^{-6}	1.9760×10^{-8}	1.8635×10^{-14}
	4.5	1.2728×10^{-6}	1.2187×10^{-8}	1.1439×10^{-14}
	5.0	7.9027×10^{-7}	7.5313×10^{-9}	7.0340×10^{-15}
	5.5	4.9164×10^{-7}	4.6636×10^{-9}	4.3366×10^{-15}

جدول (20) يبين قيم معدل تقدير المعولية للنموذج الثالث عندما (T=3)

n	ti	$\hat{R}_{Bayes}$		
		C=1	C=2	C=3
50	0.5	1.4306×10^{-3}	1.3728×10^{-4}	7.3025×10^{-9}
	1.0	7.3440×10^{-4}	6.7767×10^{-5}	3.4668×10^{-9}
	1.5	3.8409×10^{-4}	3.4140×10^{-5}	1.6826×10^{-9}
	2.0	2.0425×10^{-4}	1.7513×10^{-5}	8.3277×10^{-10}
	2.5	1.1026×10^{-4}	9.1320×10^{-6}	4.1949×10^{-10}
	3.0	6.0355×10^{-5}	4.8335×10^{-6}	2.1474×10^{-10}
	3.5	3.3462×10^{-5}	2.5939×10^{-6}	1.1157×10^{-10}
	4.0	1.8775×10^{-5}	1.4100×10^{-6}	5.8768×10^{-11}
	4.5	1.0652×10^{-5}	7.7575×10^{-7}	3.1356×10^{-11}
	5.0	6.1076×10^{-6}	4.3163×10^{-7}	1.6934×10^{-11}
	5.5	3.5368×10^{-6}	2.4273×10^{-7}	9.2495×10^{-12}
100	0.5	1.8260×10^{-4}	4.4836×10^{-6}	2.9345×10^{-11}
	1.0	7.8101×10^{-5}	1.8845×10^{-6}	1.2121×10^{-11}
	1.5	3.3945×10^{-5}	8.0524×10^{-7}	5.0920×10^{-12}
	2.0	1.4974×10^{-5}	3.4937×10^{-7}	2.1730×10^{-12}
	2.5	6.6974×10^{-6}	1.5376×10^{-7}	9.4101×10^{-13}
	3.0	3.0350×10^{-6}	6.8584×10^{-8}	4.1316×10^{-13}
	3.5	1.3925×10^{-6}	3.0983×10^{-8}	1.8378×10^{-13}
	4.0	6.4642×10^{-7}	1.4166×10^{-8}	8.2765×10^{-14}
	4.5	3.0345×10^{-7}	6.5516×10^{-9}	3.7712×10^{-14}
	5.0	1.4397×10^{-7}	3.0632×10^{-9}	1.7376×10^{-14}

	5.5	6.9002	1.4471×10^{-9}	8.0919×10^{-15}
200	0.5	4.0249×10^{-5}	3.9878×10^{-7}	3.8731×10^{-13}
	1.0	1.6048×10^{-5}	1.5756×10^{-7}	1.5164×10^{-13}
	1.5	6.4602×10^{-6}	6.2859×10^{-8}	5.9959×10^{-14}
	2.0	2.6237×10^{-6}	2.5304×10^{-8}	2.3924×10^{-14}
	2.5	1.0744×10^{-6}	1.0272×10^{-8}	9.6267×10^{-15}
	3.0	4.4339×10^{-7}	4.2025×10^{-9}	3.9048×10^{-15}
	3.5	1.8434×10^{-7}	1.7324×10^{-9}	1.5959×10^{-15}
	4.0	7.7189×10^{-8}	7.1927×10^{-10}	6.5705×10^{-16}
	4.5	3.2542×10^{-8}	3.0071×10^{-10}	2.7241×10^{-16}
	5.0	1.3810×10^{-8}	1.2656×10^{-10}	1.1370×10^{-16}
	5.5	5.8983×10^{-9}	5.3612×10^{-11}	4.7771×10^{-17}

جدول (21) يبين قيم معدل تقدير المعولية للنموذج الثالث عندما (T=4)

n	ti	$\hat{R}_{Bayes}$		
		C=1	C=2	C=3
50	0.5	1.6978×10^{-3}	1.6452×10^{-4}	8.8378×10^{-9}
	1.0	1.0239×10^{-3}	9.6268×10^{-5}	5.0177×10^{-9}
	1.5	6.2424×10^{-4}	5.7004×10^{-5}	2.8860×10^{-9}
	2.0	3.8438×10^{-4}	3.4123×10^{-5}	1.6797×10^{-9}
	2.5	2.3888×10^{-4}	2.0633×10^{-5}	9.8832×10^{-10}
	3.0	1.4975×10^{-4}	1.2594×10^{-5}	5.8744×10^{-10}
	3.5	9.4631×10^{-5}	7.7546×10^{-6}	3.5249×10^{-10}
	4.0	6.0260×10^{-5}	4.8144×10^{-6}	2.1339×10^{-10}
	4.5	3.8651×10^{-5}	3.0124×10^{-6}	1.3027×10^{-10}
	5.0	2.4961×10^{-5}	1.8989×10^{-6}	8.0162×10^{-11}
	5.5	1.6225×10^{-5}	1.2054×10^{-6}	4.9701×10^{-11}
100	0.5	2.4324×10^{-4}	6.0086×10^{-6}	3.9565×10^{-11}
	1.0	1.3706×10^{-4}	3.3462×10^{-6}	2.1777×10^{-11}
	1.5	7.7725×10^{-5}	1.8758×10^{-6}	1.2067×10^{-11}
	2.0	4.4344×10^{-5}	1.0580×10^{-6}	6.7293×10^{-12}
	2.5	2.5445×10^{-5}	6.0033×10^{-7}	3.7756×10^{-12}
	3.0	1.4681×10^{-5}	3.4256×10^{-7}	2.1307×10^{-12}
	3.5	8.5153×10^{-6}	1.9653×10^{-7}	1.2091×10^{-12}
	4.0	4.9641×10^{-6}	1.1333×10^{-7}	6.8975×10^{-13}
	4.5	2.9079×10^{-6}	6.5684×10^{-8}	3.9551×10^{-13}
	5.0	1.7115×10^{-6}	3.8252×10^{-8}	2.2791×10^{-13}

	5.5	1.0119×10^{-6}	2.2380×10^{-8}	1.3196×10^{-13}
200	0.5	5.3406×10^{-5}	5.3062×10^{-7}	5.1682×10^{-13}
	1.0	2.8084×10^{-5}	2.7725×10^{-7}	2.6832×10^{-13}
	1.5	1.4833×10^{-5}	1.4552×10^{-7}	1.3994×10^{-13}
	2.0	7.8681×10^{-6}	7.6705×10^{-8}	7.3305×10^{-13}
	2.5	4.1906×10^{-6}	4.0600×10^{-8}	3.8561×10^{-14}
	3.0	2.2408×10^{-6}	2.1576×10^{-8}	2.0367×10^{-14}
	3.5	1.2028×10^{-6}	1.1511×10^{-8}	1.0800×10^{-14}
	4.0	6.4799×10^{-7}	6.1642×10^{-9}	5.7484×10^{-15}
	4.5	3.5037×10^{-7}	3.3131×10^{-9}	3.0711×10^{-15}
	5.0	1.9011×10^{-7}	1.7870×10^{-9}	1.6466×10^{-15}
	5.5	1.0351×10^{-7}	9.6723×10^{-10}	8.8601×10^{-16}

5. تحليل النتائج

اولا– نتائج تقديرات معلمة نسبة الخلط α

1- نتائج قيم معدل التقديرات

عند ملاحظة النتائج في الجداول (6,5,4) يتبين ما يلي

a. عندما $\alpha = 0.2$ فان افضل نموذج هو النموذج الثالث في حالة (n=50,T=3) .

b. عندما $\alpha = 0.4$ فان النموذجان الثاني والثالث لهما نفس الكفاءة في حالة (n=100,T=4) .

c. عندما $\alpha = 0.5$ فان النموذج الثالث هو الافضل في حالة (n=200,T=3) .

2- نتائج متوسط مربعات الخطأ

عند ملاحظة النتائج في الجداول (9,8,7) فيتبين ما يلي

a. عندما $\alpha = 0.2$ فان النموذج الثالث هو الافضل في حالة (n=100,T=4) .

b. عندما $\alpha = 0.4,0.5$ فان النموذجان الاول والثالث لهما نفس الكفاءة فالاول في حالة (n=100,T=2) اما الثالث ففي حالة (n=100,T=4) .

ثانيا - نتائج تقديرات المعلمتين θ_1 و θ_2

1- نتائج قيم معدل التقديرات

a. من خلال ملاحظة النتائج المستحصلة من النموذج الاول في الجدول (4) يتبين ان افضل تقدير للمعلمة $\hat{\theta}_{1ML}$ هو في حالة (α=0.4,n=50,T=2)، اما افضل تقدير للمعلمة $\hat{\theta}_{2ML}$ فهو في حالة (α=0.2,n=200,T=2).

b. يتبين عند ملاحظة النتائج المستحصلة من النموج الثاني في الجدول (5) ان افضل تقدير للمعلمة تقدير $\hat{\theta}_{1ML}$ هو في حالة (α=0.5,n=50,T=4)،اما افضل تقدير للمعلمة $\hat{\theta}_{2ML}$ فهو في حالة (α=0.2,n=200,T=4).

c. من خلال ملاحظة النتائج المستحصلة من النموذج الثالث في الجدول (6) يتبين ان افضل تقدير للمعلمة $\hat{\theta}_{1ML}$ هو في حالة (α=0.2,n=50,T=3)، اما افضل تقدير للمعلمة $\hat{\theta}_{2ML}$ فهو في حالة (α=0.2,n=200,T=3).

2- نتائج متوسط مربعات الخطأ

a. من خلال ملاحظة النتائج المستحصلة من النموذج الاول في الجدول (7) يتبين ان افضل تقدير للمعلمة $\hat{\theta}_{1ML}$ هو في حالة (α=0.5,n=50,T=2)، اما افضل تقدير للمعلمة $\hat{\theta}_{2ML}$ فهو في حالة (α=0.2,n=200,T=2).

b. يتبين عند ملاحظة النتائج المستحصلة من النموج الثاني في الجدول (8) ان افضل تقدير للمعلمة تقدير $\hat{\theta}_{1ML}$ هو في حالة (α=0.5,n=100,T=4)،اما افضل تقدير للمعلمة $\hat{\theta}_{2ML}$ فهو في حالة (α=0.2,n=200,T=4).

c. من خلال ملاحظة النتائج المستحصلة من النموذج الثالث في الجدول (9) يتبين ان افضل تقدير للمعلمة $\hat{\theta}_{1ML}$ هو في حالة (α=0.5,n=100,T=3)، اما افضل تقدير للمعلمة $\hat{\theta}_{2ML}$ فهو في حالة (α=0.2,n=200,T=3).

ثالثا - نتائج تقديرات المعولية

1- نتائج قيم معدل التقديرات

a. من خلال ملاحظة النتائج المستحصلة من النموذج الاول في الجدول (10) يتبين ان افضل تقدير للمعولية $\hat{R}_{1ML}$ هو في حالة (α=0.2,n=200,T=4)، اما افضل تقدير للمعلمة $\hat{R}_{2ML}$ فهو في حالة (α=0.2,n=100,T=4).

b. من خلال ملاحظة النتائج المستحصلة من النموذج الثاني في الجدول (11) يتبين ان افضل تقدير للمعولية $\hat{R}_{1ML}$ هو في حالة (α=0.5,n=50,T=4)، اما افضل تقدير للمعلمة $\hat{R}_{2ML}$ فهو في حالة (α=0.2,n=100,T=4).

c. من خلال ملاحظة النتائج المستحصلة من النموذج الثالث في الجدول (12) يتبين ان افضل تقدير للمعولية $\hat{R}_{1ML}$ هو في حالة (α=0.5,n=50,T=4)، اما افضل تقدير للمعلمة $\hat{R}_{2ML}$ فهو في حالة (α=0.2,n=200,T=3).

d. من خلال ملاحظة النتائج المستحصلة من النموذج الاول في الجداول (21,20,19,18,17,16) يتبين ان افضل تقدير للمعولية $\hat{R}_{Bayes}$ هو في حالة (n=50,ti=0.5,C=1) لجميع حالات n وقيم C .

2- نتائج متوسط مربعات الخطأ

a. من خلال ملاحظة النتائج المستحصلة من النموذج الاول في الجدول (13) يتبين ان افضل تقدير للمعولية $\hat{R}_{1ML}$ هو في حالة (α=0.5,n=50,T=4)، اما افضل تقدير للمعلمة $\hat{R}_{2ML}$ فهو في حالة (α=0.2,n=200,T=2).

b. من خلال ملاحظة النتائج المستحصلة من النموذج الثاني في الجدول (14) يتبين ان افضل تقدير للمعولية $\hat{R}_{1ML}$ هو في حالة (α=0.5,n=50,T=5)، اما افضل تقدير للمعلمة $\hat{R}_{2ML}$ فهو في حالة (α=0.2,n=200,T=4).

c. من خلال ملاحظة النتائج المستحصلة من النموذج الثالث في الجدول (15) يتبين ان افضل تقدير للمعولية $\hat{R}_{1ML}$ هو في حالة (α=0.5,n=100,T=3)، اما افضل تقدير للمعلمة $\hat{R}_{2ML}$ فهو في حالة (α=0.2,n=200,T=3).

6. التوصيات

a. من خلال تحليل نتائج تقديرات معلمة الخلط α يتبين ان افضل نموذج لتقديرها هو النوذج الثالث ومن ثم النموذج الاول فالنموذج الثاني .

b. من خلال تحليل نتائج تقديرات المعلمتين θ_1 و θ_2 يتبين ان افضل حالة لتقدير المعلمة θ_1 هي عندما (α=0.5,n=50,T=2,3,4)، اما افضل حالة لتقدير المعلمة θ_2 فهي (α=0.2,n=200,T=2,3,4).

c. من خلال تحليل نتائج تقديرات المعولية R_{1ML} و R_{2ML} يتبين ان افضل حالة لتقدير R_{1ML} هي عندما (α=0.5,n=50,T=4)، اما افضل حالة لتقدير المعلمة R_{2ML} فهي (α=0.2,n=100,200,T=3,4).

d. من خلال تحليل نتائج تقديرات المعولية R_{Bayes} يتبين ان افضل حالة لتقديرها هي(n=50,ti=0.5,C=1) لجميع حالات n وقيم C.