مجلة القادسية لعلوم الحاسوب والرياضيات المجلد (3) العدد (1) السنة (2011)

اسلوب عددي لحساب التكاملات الثنائية

الصفحة 7-22

علي حسن محمد بتول حاتم عكار
قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/ جامعة الكوفة

الخلاصة

الهدف الرئيس من هذا البحث هو إيجاد قيم التكاملات ثنائية البعد عددياً مكاملاتها مستمرة أو معتلة المشتقات الجزئية أو معتلة في نقطة واحدة أو أكثر من منطقة التكامل ، وإيجاد صيغة عامة لصيغ الخطأ حسب سلوك المكامل وبأسلوب جديد مغاير للأسلوب الذي اتخذه باحثون آخرون محمد[13]، الطائي [10] ، ضياء [11] وغيرهم .
حيث قدمنا ثلاث مبرهنات (كحالات) مع البرهان لإيجاد حدود التصحيح بالنسبة للتكامل الثنائي لكل حالة من حالات المكامل ، وبالاعتماد على هذه الحدود قمنا بحساب التكامل الثنائي فوجدنا إن طريقة RMM (التي هي طريقة مركبة من استخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعدين الداخلي x والخارجي y مع تطبيق طريقة تعجيل رومبرك عليها عندما عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل الخارجي بمعنى ان $\left(h=\bar{h}\right)$ حيث إن $\bar{h}$ المسافات بين الإحداثيات السينية و h المسافات بين الإحداثيات الصادية) يمكن الاعتماد عليها في حساب التكاملات الثنائية حيث أعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً وبوقت اقل مما احتاجه الباحثون اعلاه الذين تعاملوا مع الموضوع نفسه

1. المقدمة

عمل الكثير من العلماء في مجال التكاملات الأحادية نظرا لأهميتها في حساب المساحات المستوية وفي إيجاد حجوم الأجسام الدورانية وإيجاد المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتي للسطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة وإيجاد ضغط السائل فرانك آيرز[12] ومرجع جيد لهذه الأعمال كتاب ، دافييز ورابينوتز [6] عام 1975 فضلا عن أعمال فوكس [1] عام 1967 وفوكس وهيز[2] عام 1970 وشانكس [8] عام 1972 الذين تعاملوا مع هذا الموضوع من أوجه عدة .

أما عملية إيجاد قيمة للتكامل الثنائي (Double Integral) فإنها تشكل مسألة اعقد بكثير من مشكلة إيجاد قيمة التكامل الأحادي لان المكامل هنا يعتمد على متغيرين وان مسالة الاستمرارية والاعتلال في المكامل والاعتلال في المشتقات الجزئية للمكامل تشكل صعوبات رئيسة كبيرة وكذلك فإننا هنا سنتعامل مع مناطق التكامل (Regions) أو سطوح (Surfaces) وليس مع فترات تكامل كما في حالة التكامل الأحادي .
وهنالك حالات كثيرة يجب توافرها عندما يتطلب إيجاد قيم تكاملات ثنائية كما هي الحال عند حل مسائل تتعلق بمواضيع الكهرومغناطيسية والحرارة والموجات الصوتية ومواضيع أخر . محمد [13]
إن إيجاد قيم التكاملات من هذا النوع ليس بالأمر السهل إلا في حالات قليلة لذا أصبحت الحاجة ملحة لإيجاد قيم تقريبية لهذه التكاملات وتكمن أهمية التكاملات الثنائية في إيجاد مساحة السطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتية للسطوح المستوية وإيجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي ، وكمثال على ذلك الحجم الناتج من دوران منحني القلب $\rho=2\left(1-\cos\theta\right)$ حول المحور القطبي.

فضلا عن أهميته في إيجاد مساحة سطح منحن كإيجاد مساحة قطعة السطح $x^2+y^2+z^2=4$ الواقعة مباشرة فوق منحني القلب $\rho=(1-\cos\theta)$ أو حساب مساحة قطعة الكرة $x^2+y^2+z^2=36$ الواقعة داخل الاسطوانة $y^2+z^2=6y$. فرانك آيرز[12]

مما دعا كثير من الباحثين إلى العمل في مجال التكاملات الثنائية ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على حساب التكاملات ذات المكاملات المستمرة بالصيغة $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ هما هانس جار وجاكوبسن[3] عام 1973 ومنهم من اشتغل بالتكاملات ذات المكاملات المعتلة لكنهم كانوا يهملون الاعتلال ، دافييز ورابينوتز[6] عام 1975 .

وفي عام 1984 عالج محمد [13] التكاملات ذات المكاملات المستمرة، أوالمعتلة المشتقة أ والمعتلة ، وكان دأبه التخلص من الاعتلال على البعد الداخلي من التكامل (سواء كانت المكاملات ذات اعتلال جذري أم لوغارتمي أم كليهما) وذلك باستخدام طريقة مركبة من قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك في البعد الخارجي وقاعدة كاوس في البعد الداخلي التي اسماها بطريقة رومبرك (كاوس) ، وقد أثبتت نجاحها على كثير من التكاملات ذات المكاملات المستمرة ، أو المعتلة المشتقة أو المعتلة .

فقد أهمل الاعتلال على البعد الداخلي x أي إن $\bar{E}(\bar{h})$ (حدود التصحيح على البعد الداخلي x) دائما كانت بالشكل :-

$$\bar{E}(\bar{h})=\bar{A}_1\bar{h}^2+\bar{A}_2\bar{h}^4+\bar{A}_3\bar{h}^6+\dots$$

وقد تمكن من إثبات أن قاعدة كاوس أفضل من قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك للتكاملات المستمرة المكامل ، كما اثبت العكس للتكاملات ذات المكاملات معتلة المشتقة أو المكاملات المعتلة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وعدد الفترات الجزئية ، وبذلك كانت الأفضلية لطريقة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على قاعدة كاوس .

كما قدم محمد [4] بحثا في عام 2002 بيَن فيه طريقة مركبة من قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك وعلى البعدين الداخلي x والخارجي y لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة التي لا يمكن إلغاء الاعتلال فيها وعلى البعدين x و y من دون إهمال الاعتلال على البعدين x و y واسماها طريقة رومبرك (رومبرك) حيث إن $\bar{E}(\bar{h})$ (حدود التصحيح للبعد الداخلي x) يعتمد على سلوك المكامل وقد أعطت نتائج جيدة .

أما الطائي [10] فقد استخدمت في عام 2005 قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي y وقاعدة سمبسون على البعد الداخلي x مع إهمال الاعتلال على البعد الداخلي x ، أي إن $\bar{E}(\bar{h})$ مشابهه للصيغة السابقة ، وقد أعطت نتائج جيدة .

أما في عام 2009 فقد قدم كل من محمد وآخرون [5] بحثا في إيجاد القيمة العددية للتكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة وتناولوا فيه ثلاث طرائق وهي :

طريقة $RM(RS)$ و $RT(RS)$ و $RS(RS)$ إذ إن هذه الطرائق اعتمدت كلاً من قاعدة النقطة الوسطى وقاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون على البعد الخارجي y وقاعدة سمبسون على البعد الداخلي x وباستخدام تعجيل رومبرك على كلا البعدين x و y مع عدم إهمال الاعتلال في كلا البعدين.

وقد توصلوا إلى أن طريقة $RM(RS)$ هي الأفضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب (اعتمادا على عدد الفترات الجزئية المستخدمة) .

أما ضياء [11] فقد استخدمت في عام 2009 أربع طرائق مركبة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون وطريقة رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى لتعطي طرائق لحساب قيم تكاملات ثنائية حيث إن مكاملاتها مختلفة السلوك (مستمرة أو مستمرة ولكن مشتقاتها معتلة أو معتلة وممكن إلغاء الاعتلال فيها) وهذه الطرائق هي طريقة $RM(RS)$ ،

$RM(RM)$ ، $RS(RM)$ و $RS(RS)$ وقد أعطت نتائج جيدة وقد أثبتت بان الطرائق الأربع التي اعتمدتها أعطت نفس الدقة بنفس عدد الفترات الجزئية بالنسبة للتكاملات التي مكاملاتها مستمرة في منطقة التكامل . أما بالنسبة للتكاملات المعتلة في نقطة أو أكثر من منطقة التكامل فقد أثبتت أفضلية الطريقتين $RM(RS)$ و $RM(RM)$ على الطريقتين $RS(RS)$ و $RS(RM)$ حيث إن الأخيرتين بطيئتين جداً في إعطاء الدقة بعدد كبير جداً من الفترات الجزئية وعلى البعدين x و y بعدد مراتب قليلة جداً . وقد أثبتت من خلال الأمثلة المختارة للتكاملات المعتلة والممكن إلغاء الاعتلال فيها إن طريقة $RM(RS)$ كانت الأفضل ، أما بالنسبة للتكاملات المعتلة التي لا يمكن إلغاء الاعتلال فيها فقد أثبتت من خلال الأمثلة (التكاملات) المختارة انه طريقة $RM(RM)$ هي الأفضل أما بالنسبة للتكاملات ذات المكاملات المعتلة المشتقة فقد أثبتت إن أفضل طريقة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب إلى القيم التحليلية بعدد فترات جزئية قليلة هي طريقة $RM(RS)$.

وقد ناقشت الحالات الآتية عند استخراج صيغ الخطأ $\bar{E}\left(\bar{h}\right)$:-

1- إلغاء الاعتلال على البعد الداخلي باستخدام قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي. محمد [13].

2- فرض $y = a$ مع عدم إلغاء الاعتلال حيث a هي نقطة الاعتلال ، محمد وآخرون [5] .

3- فرض ($y =$ ثابت) محمد [4] .

واختبرت الحالات الثلاثة هذه على جميع الطرائق التي استعملتها وقد توصلت إلى أن الحالة الأولى تعطي نتائج أفضل مع جميع الطرائق إلا في حالة المكاملات المعتلة والتي لا بمكن إلغاء الاعتلال فيها ، فان الحالة الثالثة هي الأفضل وبجميع الطرائق التي استعملتها

تناولنا في هذا البحث طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثنائية وذلك بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على البعدين x و y عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل الخارجي و $h = \bar{h}$ وأسميناها RMM وقدمنا ثلاث مبرهنات(كحالات) مع البرهان لإيجاد صيغة عامة لحدود التصحيح لكل حالة من حالات المكامل (مستمر في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل أو مستمر ولكن معتل المشتقة في نقطة واحدة من منطقة التكامل أو معتل في نقطة من منطقة التكامل) . واتضح من خلال المقارنة بين الطريقة أعلاه وأفضل الطرائق والحالات التي ناقشتها ضياء[11] ، إن طريقة RMM هي الأفضل من حيث الدقة وسرعة اقتراب القيم إلى القيم الحقيقية للتكاملات وعدد الفترات الجزئية وبوقت قليل نسبياً .

2 الأسلوب المقترح لحساب تكاملات ثنائية البعد

نستعرض الآن طريقة(اسلوب) لحساب التكاملات الثنائية بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين(الداخلي والخارجي) عندما n (عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها $[a,b]$) مساوية إلى m (عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها $[c,d]$) و $h = \bar{h}$.

وقد اخترنا النقطة الوسطى لإمكانية استخدامها على التكاملات التي مكاملاتها معرفة أو غير معرفة في منطقة التكامل ، ونرمز لهذه الطريقة بالرمز RMM حيث R طريقة تعجيل رومبرك أما MM فهي قاعدة النقطة الوسطى المطبقة على كلا البعدين والتي صيغتها العامة هي :

$$MM\left(h\right) = h^2 \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_j\right)$$

إذ إن $x_i = a + \frac{2i-1}{2}h$ ، $i = 1,2,\ldots,n$.

$y_i = c + \frac{2j-1}{2}h$ ، $j = 1,2,\ldots,m$.

فعندما نبدأ بوضع $n = m = 1$ في الصيغة أعلاه فإننا نحسب القيمة التقريبية للتكامل الثنائي حيث يتم حساب $MM(h)$ وإنها تساوي $h^2 f(x_1, y_1)$ ونثبت في جداولنا هذه القيمة التقريبية عندما $m = n = 1$.

ثم نضع $m = n = 2$ أي نحسب $MM(h)$ حيث إن

$$MM(h) = h^2 \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} f(x_i, y_j)$$

وأيضا نثبت هذه القيمة في جداولنا على إنها القيمة التقريبية للتكامل الثنائي I . ويمكننا تحسين القيمتين التقريبيتين التي حصلنا عليهما بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك عليها بعد معرفة صيغة الخطأ وبذلك نحصل على قيمة للتكامل الثنائي بطريقة رومبرك مع النقطة الوسطى وعلى البعدين x و y .

وهكذا نستمر بتطبيق قاعدة MM بالنسبة لبقية قيم $m = n$ ، ثم نطبق عليها تعجيل رومبرك لتعجيل اقتراب القيم إلى القيمة التحليلية للتكامل إلى أن نحصل على القيمة بالدقة المرغوبة التي نختارها .

إن صيغة الخطأ تعتمد على سلوك الدالة $f(x,y)$ في المنطقة $[c,d]\times[a,b]$ فيما إذا كانت مستمرة أو معتلة المشتقات الجزئية في نقطة من منطقة التكامل أو معتلة في نقطة من منطقة التكامل وكالاتي:

أولاً : التكاملات الثنائية لمكاملات مستمرة Double Integrals With Continuous Integrands

نفرض إن التكامل I معرف كالآتي :

$$I = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

حيث إن $f(x,y)$ مكامل مستمر في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[c,d]\times[a,b]$.

بشكل عام يمكن كتابة التكامل I بالصورة الآتية :

$$I = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = MM(h) + E(h) \quad \ldots(1)$$

حيث إن $MM(h)$ تمثل قيمة التكامل عددياً باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعدين x و y .

وان $E(h)$ هي سلسلة حدود التصحيح correction terms الممكن إضافتها إلى قيم $MM(h)$ ، وان $h = \frac{(d-c)}{n} = \frac{(b-a)}{n}$ (سنختار $m = n$) .

اذ ان صيغة الخطا للتكاملات الاحادية ذات المكاملات المستمرةباستخدام قاعدة النقطة الوسطى كالاتي:

$$E_M(h) = \frac{1}{6}h^2(f'_{2n} - f'_0) - \frac{7}{360}h^4(f_{2n}^{(3)} - f_0^{(3)}) + \frac{31}{15120}h^6(f_{2n}^{(5)} - f_0^{(5)}) - \ldots \quad \ldots\ldots(2)$$

فوكس[1]

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل Mean−value theorem for derivatives للصيغة في اعلاه نحصل على:

$$E_M(h)=\frac{1}{6}h^2(f'_{2n}-f'_0)-\frac{7}{360}h^4(f^{(3)}_{2n}-f^{(3)}_0)+\frac{31}{15120}h^6(f^{(5)}_{2n}-f^{(5)}_0)-\ldots\ldots(3)$$

معلوم لدينا انه

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

فبالنسبة للتكامل الأحادي $\int_c^d f(x,y)dy$ (التعامل مع x كثابت) عددياً هو :−.

...(4)

$$\int_c^d f(x,y)dy=h\sum_{j=1}^n f(x,y_j)+\frac{(d-c)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x,\mu_1)}{\partial y^2}-\frac{7(d-c)}{360}h^4\frac{\partial^4(x,\mu_2)}{\partial y^4}+\ldots$$

باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعد y .

حيث $\mu_\ell\in(c,d)$ و $\ell=1,2,\ldots$ و $y_j=c+\frac{2j-1}{2}h$ و $j=1,2,\ldots,n$.

وبمكاملة(4) عدديا على الفترة $[a,b]$ أيضا باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعد x نحصل على :

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx=h^2\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n f(x_i,y_j)+h\sum_{j=1}^n\left[\frac{(b-a)h^2}{6}\frac{\partial^2 f(\zeta_{1j},y_j)}{\partial x^2}-\frac{7(b-a)h^4}{360}\frac{\partial^4 f(\zeta_{2j},y_j)}{\partial x^4}+\ldots\right]$$

$$+\int_a^b\left[\frac{(d-c)h^2}{6}\frac{\partial^2 f(x,\mu_1)}{\partial y^2}-\frac{7(d-c)h^4}{360}\frac{\partial^4 f(x,\mu_2)}{\partial y^4}+\ldots\right]dx$$

حيث $\zeta_{kj}\in(a,b)$ و $k=1,2,\ldots$ و $x_i=a+\frac{2i-1}{2}h$ و $i=1,2,\ldots,n$.

وبما إن $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^4 f}{\partial x^4},\ldots$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\frac{\partial^4 f}{\partial y^4},\ldots$ مستمرة في كل نقطة من نقاط المنطقة $[c,d]\times[a,b]$.

فان صيغة حدود التصحيح تصبح :−

$$E(h)=h(b-a)n\left[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(\overline{n_1},\overline{\mu_1})}{\partial x^2}-\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(\overline{n_2},\overline{\mu_2})}{\partial x^4}+\ldots\right]+(d-c)(b-a)\left[\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1)}{\partial y^2}-\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2)}{\partial y^4}+\ldots\right]$$

$$=(d-c)(b-a)\frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial^2 f(\overline{n_1},\overline{\mu_1})}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1)}{\partial y^2}\right)-\frac{7(d-c)(b-a)h^4}{360}\left(\frac{\partial^4 f(\overline{n_2},\overline{\mu_2})}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 f(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2)}{\partial y^4}\right)+\ldots \quad ....(5)$$

حيث $(\overline{n_\ell},\overline{\mu_\ell}),(\hat{n}_\ell,\hat{\mu}_\ell)\in[c,d]\times[a,b]$ $\ell=1,2,\ldots,$.

لذا إذا كان المكامل دالة مستمرة ومشتقاتها الجزئية موجودة Exist في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[c,d]\times[a,b]$ فانه يمكن كتابة صيغة الخطأ كالآتي :

$$I-MM(h)=Ah^2+Bh^4+Ch^6+\ldots \qquad \ldots(6)$$

حيث $A,B,C,\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة فقط ولا تعتمد على h .

واضح من الصيغة(6) إن قوى h هي نفسها قوى h بالنسبة لقاعدة النقطة الوسطى في الصيغة (3) (أي في حالة التكاملات الأحادية لمكاملات مستمرة) .

ثانياً : التكاملات الثنائية لمكاملات مستمرة – معتلة المشتقات الجزئية

Double Integrals For Continuous Integrands With Singularity In Partial Derivatives

لنفرض التكامل الثنائي I المعرف بالصيغة :

$$I=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy = MM(h)+E(h)$$

حيث $f(x,y)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[y_0,y_n]\times[x_0,x_n]$ وليس لها اعتلال ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة Undefined في نقطة واحدة أو أكثر من منطقة التكامل .

الحالة الأولى

لنفرض إن دالة التكامل $f(x,y)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[y_0,y_n]\times[x_0,x_n]$ وليس لها اعتلال ولكن المشتقات الجزئية للدالة غير معرفة عند النقطة (x_0,y_0) وهذا يعني إن متسلسلة تايلر للدوال ذات متغيرين Taylor's series for a function of two variable ، سستري [7]و [9] موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة (x_0,y_0) . نستطيع أن نكتب التكامل الثنائي I بالشكل الآتي :

$$I=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy=\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy+\int_{y_0}^{y_1}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x,y)dxdy+\sum_{s=1}^{n-1}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy+\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y)dxdy$$

$$\ldots\ldots(7)$$

بالنسبة للتكامل الأول في المنطقة الجزئية $[y_0,y_1]\times[x_0,x_1]$ نستعمل متسلسلة تايلر إلى $f(x,y)$ حول النقطة (x_1,y_1) أي أن

$$\begin{aligned}f(x,y)=&f(x_1,y_1)+(y-y_1)f_y(x_1,y_1)+(x-x_1)f_x(x_1,y_1)+\frac{(y-y_1)^2}{2}f_{yy}(x_1,y_1)\\&+\frac{(x-x_1)^2}{2}f_{xx}(x_1,y_1)+(x-x_1)(y-y_1)f_{xy}(x_1,y_1)+\frac{(y-y_1)^3}{3!}f_{yyy}(x_1,y_1)\\&+\frac{(x-x_1)^3}{3!}f_{xxx}(x_1,y_1)+\frac{(y-y_1)(x-x_1)^2}{2!}f_{xxy}(x_1,y_1)+\frac{(x-x_1)(y-y_1)^2}{2!}f_{xyy}(x_1,y_1)\\&+\frac{(y-y_1)^4}{4!}f_{yyyy}(x_1,y_1)+\ldots\end{aligned} \qquad \ldots(8)$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية لـ $f\left(x,y\right)$ موجودة عند النقطة $\left(x_1,y_1\right)$ وبأخذ التكامل الثنائي للصيغة(8) في المنطقة $\left[y_0,y_1\right]\times\left[x_0,x_1\right]$ نحصل على :

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,y\right)dxdy = h^2 f\left(x_1,y_1\right) - \frac{h^3}{2}f_y\left(x_1,y_1\right) - \frac{h^3}{2}f_x\left(x_1,y_1\right) + \frac{h^4}{3!}f_{yy}\left(x_1,y_1\right)$$
$$+\frac{h^4}{3!}f_{xx}\left(x_1,y_1\right) - \frac{h^5}{4!}f_{yyy}\left(x_1,y_1\right) - \frac{h^5}{4!}f_{xxx}\left(x_1,y_1\right) - \frac{h^5}{2\times 3!}f_{xxy}\left(x_1,y_1\right)$$
$$-\frac{h^5}{2\times 3!}f_{xyy}\left(x_1,y_1\right) + \frac{h^6}{5\times 4!}f_{yyyy}\left(x_1,y_1\right) + \ldots \qquad \ldots(9\ )$$

وبالتعويض عن x بـ $x_0+\frac{1}{2}h$ وعن y بـ $y_0+\frac{1}{2}h$ في الصيغة(8) نحصل على

$$f\left(x_0+0.5h, y_0+0.5h\right) = f\left(x_1,y_1\right) - \frac{h}{2}f_y\left(x_1,y_1\right) - \frac{h}{2}f_x\left(x_1,y_1\right) + \frac{h^2}{8}f_{xx}\left(x_1,y_1\right)$$
$$+\frac{h^2}{8}f_{yy}\left(x_1,y_1\right) + \frac{h^2}{4}f_{xy}\left(x_1,y_1\right) - \frac{h^3}{8\times 3!}f_{yyy}\left(x_1,y_1\right) - \frac{h^3}{8\times 3!}f_{xxx}\left(x_1,y_1\right)$$
$$-\frac{h^3}{16}f_{xxy}\left(x_1,y_1\right) - \frac{h^3}{16}f_{xyy}\left(x_1,y_1\right) + \frac{h^4}{16\times 4!}f_{yyyy}\left(x_1,y_1\right) + \ldots$$

$\ldots(10)$

ومن الصيغتين (9) ،(10) نحصل على

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,y\right)dxdy = h^2 f\left(x_0+0.5h, y_0+0.5h\right) + \frac{h^4}{24}f_{yy}\left(x_1,y_1\right) + \frac{h^4}{24}f_{xx}\left(x_1,y_1\right) - \frac{h^5}{48}f_{yyy}\left(x_1,y_1\right)$$
$$-\frac{h^5}{48}f_{xxx}\left(x_1,y_1\right) - \frac{h^5}{48}f_{xyy}\left(x_1,y_1\right) - \frac{h^5}{48}f_{xxy}\left(x_1,y_1\right) + \frac{11h^6}{1920}f_{yyyy}\left(x_1,y_1\right) + \ldots \qquad \ldots(11)$$

أما بالنسبة للتكامل الثاني والثالث والرابع فنلاحظ إن دالة التكامل مستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة تكاملاتها لذا فان

$$\int_{y_0}^{y_1}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f\left(x,y\right)dxdy = h^2\sum_{r=1}^{n-1} f\left(x_r+0.5h, y_0+0.5h\right) + A_1h^2 + B_1h^4 + \ldots \qquad \ldots(12)$$

$$\sum_{s=1}^{n-1}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,y\right)dxdy = h^2\sum_{s=1}^{n-1} f\left(x_0+0.5h, y_s+0.5h\right) + A_2h^2 + B_2h^4 + \ldots \qquad \ldots(13)$$

$$\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f\left(x,y\right)dxdy = h^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_1+\frac{2i-1}{2}h, y_1+\frac{2j-1}{2}h\right) + A_3h^2 + B_3h^4 + \ldots \qquad \ldots(14)$$

حيث $A_i, B_i, \ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f\left(x,y\right)$ فقط ، $i=1,2,\ldots$ وبجمع الصيغ (11)،(12)،(13)،(14)نحصل على :-

$$I = \int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f\left(x,y\right)dxdy = h^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h, y_0+\frac{2j-1}{2}h\right) + \left[\frac{h^4}{24}\left(D_{yy}+D_{xx}\right)\right.$$
$$\left. -\frac{h^5}{48}\left(D_{yyy}+D_{xxx}+D_{xyy}+D_{xxy}\right) + \frac{11h^2}{1920}D_{yyyy} + \ldots\right] f\left(x_1,y_1\right)$$
$$+Ah^2 + Bh^4 + \ldots \qquad \ldots(15)$$

حيث $A,B,\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f\left(x,y\right)$ فقط ، وان $D_x=\frac{\partial}{\partial x}$ ، $D_y=\frac{\partial}{\partial y}$ ، $D_{xx}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ، $D_{yy}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ،...

الحالة الثانية

نفرض إن $f\left(x,y\right)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $\left[x_0,x_n\right]\times\left[y_0,y_n\right]$ وليس لها اعتلال ولكن المشتقات الجزئية للدالة غير معرفة عند النقطة $\left(x_n,y_n\right)$ وهذا يعني إن متسلسلة تايلر للدوال ذات المتغيرين موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة $\left(x_n,y_n\right)$.

نستطيع أن نكتب :-

$$I=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n}f\left(x,y\right)dxdy=\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_{n-1}}f\left(x,y\right)dxdy+\sum_{r=0}^{n-2}\int_{y_r}^{y_{r+1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n}f\left(x,y\right)dxdy+\int_{y_{n-1}}^{y_n}\sum_{s=0}^{n-2}\int_{x_s}^{x_{s+1}}f\left(x,y\right)dxdy+\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n}f\left(x,y\right)dxdy \quad \ldots(16)$$

بالنسبة للتكامل الرابع في المنطقة الجزئية $\left[x_{n-1},x_n\right]\times\left[y_{n-1},y_n\right]$ نستعمل متسلسلة تايلر $f\left(x,y\right)$ حول النقطة $\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)$ أي إن

$$\begin{aligned}f\left(x,y\right)=&f\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\left(y-y_{n-1}\right)f_y\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\left(x-x_{n-1}\right)f_x\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)\\&+\frac{\left(y-y_{n-1}\right)^2}{2}f_{yy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{\left(x-x_{n-1}\right)^2}{2}f_{xx}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\left(x-x_{n-1}\right)\left(y-y_{n-1}\right)f_{xy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)\\&+\frac{\left(y-y_{n-1}\right)^3}{3!}f_{yyy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{\left(x-x_{n-1}\right)^3}{3!}f_{xxx}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{\left(y-y_{n-1}\right)\left(x-x_{n-1}\right)^2}{2!}f_{xxy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)\\&+\frac{\left(x-x_{n-1}\right)\left(y-y_{n-1}\right)^2}{2!}f_{xyy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{\left(y-y_{n-1}\right)^4}{4!}f_{yyyy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\ldots \qquad \ldots(17)\end{aligned}$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية لـ $f\left(x,y\right)$ موجودة عند $\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)$ وبأخذ التكامل الثنائي للصيغة(17)في المنطقة $\left[x_{n-1},x_n\right]\times\left[y_{n-1},y_n\right]$ نحصل على :-

$$\begin{aligned}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n}f\left(x,y\right)dxdy=&h^2f\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h^3}{2}f_y\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h^3}{2}f_x\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)\\&+\frac{h^4}{3!}f_{yy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h^4}{3!}f_{xx}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h^4}{4}f_{xy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)\\&+\frac{h^5}{4!}f_{yyy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h^5}{4!}f_{xxx}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h^5}{2\times3!}f_{xxy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)\\&+\frac{h^5}{2\times3!}f_{xyy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h^6}{5\times4!}f_{yyyy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\ldots \qquad \ldots(18)\end{aligned}$$

وبالتعويض عن x بـ $x_n-\frac{1}{2}h$ وعن y بـ $y_n-\frac{1}{2}h$ في الصيغة(17)نحصل على

$$f\left(x_n-0.5h,y_n-0.5h\right)=f\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h}{2}f_y\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h}{2}f_x\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)$$
$$+\frac{h^2}{8}f_{yy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h^2}{8}f_{xx}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h^2}{4}f_{xy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)$$
$$+\frac{h^3}{8\times 3!}f_{yyy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h^3}{8\times 3!}f_{xxx}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\ldots \qquad \ldots(19)$$

ومن الصيغتين (18)،(19) نحصل على

$$\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n}f\left(x,y\right)dxdy=h^2f\left(x_n-0.5h,y_n-0.5h\right)+\frac{h^4}{24}f_{yy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h^4}{24}f_{xx}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)$$
$$+\frac{h^5}{48}f_{yyy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h^5}{48}f_{xxx}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{h^5}{48}f_{xxy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)$$
$$+\frac{h^5}{48}f_{xyy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\frac{11h^6}{1920}f_{yyyy}\left(x_{n-1},y_{n-1}\right)+\ldots \qquad \ldots(20)$$

أما بالنسبة للتكاملات الثلاثة الأولى التي هي ذات مشتقات جزئية مستمرة بالنسبة للدالة $f\left(x,y\right)$ في جميع نقاط منطقة التكامل نلاحظ إن :

$$\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_{n-1}}f\left(x,y\right)dxdy=h^2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h,y_0+\frac{2j-1}{2}h\right)+A_1h^2+B_1h^4+\ldots \qquad \ldots(21)$$

$$\sum_{r=0}^{n-2}\int_{y_r}^{y_{r+1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n}f\left(x,y\right)dxdy=h^2\sum_{r=0}^{n-2}f\left(x_{n-1}+0.5h,y_r+0.5h\right)+A_2h^2+B_2h^4+\ldots \qquad \ldots(22)$$

$$\int_{y_{n-1}}^{y_n}\sum_{s=0}^{n-2}\int_{x_s}^{x_{s+1}}f\left(x,y\right)dxdy=h^2\sum_{s=0}^{n-2}f\left(x_s+0.5h,y_{n-1}+0.5h\right)+A_3h^2+B_3h^4+\ldots \qquad \ldots(23)$$

حيث $A_i,B_i,\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f\left(x,y\right)$ فقط ، $i=1,2,\ldots$ وبجمع الصيغ (20)،(21)،(22)و(23) نحصل على :-

$$I=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n}f\left(x,y\right)dxdy=h^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h,y_0+\frac{2j-1}{2}h\right)+\left[\frac{h^4}{24}\left(D_{yy}+D_{xx}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{h^5}{48}\left(D_{yyy}+D_{xxx}+D_{xyy}+D_{xxy}\right)+\frac{11h^2}{1920}D_{yyyy}+\ldots\right]f\left(x_1,y_1\right)$$
$$+Ah^2+Bh^4+\ldots \qquad \ldots(24)$$

حيث $A,B,\ldots$ ثوابت .

لذا فان صيغة الخطأ باستعمال قاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين عندما $m=n$ $\left(h=\overline{h}\right)$ في حالة الاعتلال في $\left(x_0,y_0\right)$ أو $\left(x_n,y_n\right)$ تكتب بالشكل الآتي :-

$$I-MM\left(h\right)=a_1f_1\left(h\right)+a_2f_2\left(h\right)+\ldots+Ah^2+Bh^4+\ldots \qquad \ldots(25)$$

إذ إن $A,B,\ldots$ و a_i ثوابت و $i=1,2,\ldots$ وان f_i دوال تعتمد على h فقط ونحصل عليها من خلال الصيغ (15)و(24).

ثالثاً : التكاملات الثنائية لمكاملات معتلة Double Integrals With Singular Integrands

لنفرض إن مكامل التكامل الثنائي I معرف في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة $\left(x_0, y_0\right)$ فان تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين لا تستعمل قيمة المكامل في النقطة $\left(x_0, y_0\right)$ وبذلك يكون من الممكن استعمال الصيغة(15) للحصول على قيمة التكامل باستخدام النقطة الوسطى على كلا البعدين x و y وكذلك للحصول على صيغ الخطأ .

وكذا الحال إذا كانت $f\left(x_n, y_n\right)$ غير معرفة فنستخدم الصيغة(24)

3.الأمثلة :-

1. $I=\int_1^2\int_1^2 \ln\left(x+y\right)dxdy$ إذ إن قيمته التحليلية هي 1.089138652066 مقربة لاثنتي عشرة مرتبة عشرية .
2. $I=\int_0^1\int_0^1 y\sqrt{1-xy}\,dxdy$ إذ إن قيمته التحليلية هي 0.4 .
3. $I=\int_0^1\int_0^1 \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$ إذ إن قيمته التحليلية هي 2.263943507354 مقربة لاثنتي عشرة مرتبة عشرية .

4 النتائج :-

إن مكامل التكامل $I=\int_1^2\int_1^2 \ln\left(x+y\right)dxdy$ معرف لكل $\left(x,y\right)\in[1,2]\times[1,2]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح لهذا التكامل تكون مماثلة للصيغة(6):-

$$E\left(h\right)=Ah^2+Bh^4+...$$

حيث $A,B,...$ ثوابت والجدول (1) يبين حساب التكامل أعلاه عددياً باستعمال RMM علماً إن القيم في الجدول مقربة إلى اثنتي عشرة مرتبة عشرية .

$n=m$	قيم قاعدة MM	K=2	K=4	K=6	K=8
1	1.098612288668				
2	1.091569569426	1.089221996346			
4	1.089750645979	1.089144338164	1.089139160952		
8	1.089291923716	1.089139016295	1.089138661503	1.089138653575	
16	1.089176987161	1.089138674976	1.089138652221	1.089138652074	1.089138652068

الجدول (1) حساب التكامل الثنائي $I=\int_1^2\int_1^2 \ln(x+y)dxdy$.

نلاحظ من الجدول عندما $n=m=16$ فان القيمة بقاعدة MM (العمود الأول من الجدول) صحيحة لأربع مراتب عشرية بفارق (38335095) وحدة في المرتبة الخامسة وما بعدها بينما القيمة بطريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة تكون صحيحة لإحدى عشر مرتبة بفارق وحدتين بالمرتبة الثانية عشر .

كذلك نلاحظ إن القيمة صحيحة لثمان مراتب عشرية عندما $n=m=8$ (2^6 فترة جزئية) في حين حصلت ضياء [11] على ست مراتب عشرية صحيحة عندما $n=16$ و $m=4$ (2^6 فترة جزئية) في جميع الطرائق والحالات التي ذكرت سابقاً .

أما مكامل التكامل $I=\int_0^1\int_0^1 y\sqrt{1-xy}\,dxdy$ فهو معتل المشتقات الجزئية عندما $(x,y)=(1,1)$ ونوع الاعتلال جذري لذا فان صيغة حدود التصحيح باستخدام الصيغة(14) للتكامل هي :-

$$
\begin{aligned}
E(h)&=a_1h^{\frac{5}{2}}+a_2h^{\frac{7}{2}}+a_3h^{\frac{9}{2}}+\ldots+Ah^2+Bh^4+\ldots\\
&=Ah^2+a_1h^{\frac{5}{2}}+a_2h^{\frac{7}{2}}+Bh^4+\ldots
\end{aligned}
$$

حيث $A,B,\ldots$ و a_i ثوابت ، $i=1,2,\ldots$.حصلنا على النتائج المدونة في الجدول(2) الذي يبين حساب التكامل أعلاه عددياً وقد اتضح الآتي :-

عندما $n=m=128$ فان قيمة التكامل باستخدام قاعدة MM صحيحة لخمس مراتب عشرية وباستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع هذه القيمة حصلنا على قيمة صحيحة لاثنتي عشرة مرتبة عشرية بـ (2^{14} فترة جزئية) . و حصلت ضياء [11]أيضا على قيمة صحيحة لاثنتي عشرة مرتبة عشرية عندما $n=512$ و $m=32$ (2^{14} فترة جزئية) والتي هي أفضل نتيجة عند استعمالها طريقة $RM\,(RS)$ حسب الحالة الأولى . وكذلك حصلت على قيمة صحيحة لتسع مراتب عشرية باستعمال الطريقة والحالة أعلاه عندما $n=512$ و $m=16$ (2^{13} فترة جزئية) . بينما حصلنا على قيمة صحيحة لعشرة مراتب عشرية عندما $n=m=64$ (2^{12} فترة جزئية) .

$n=m$	قيم قاعدة MM	K=2	K=2.5	K=3.5	K=4	K=4.5	K=5.5	K=6
1	0.4330127018922							
2	0.4098819122071	0.4021716489788						
4	0.4027779632925	0.4004099803210	0.4000316844665					
8	0.4007505402439	0.4000747325610	0.4000027423843	0.3999999362082				
16	0.4001977088048	0.4000134316585	0.4000002680722	0.4000000281670	0.4000000342976			
32	0.4000512255695	0.4000023978244	0.4000000284494	0.4000000052160	0.4000000036859	0.4000000022705		
64	0.4000131261669	0.4000004263660	0.4000000030205	0.4000000005549	0.4000000002442	0.4000000000851	0.4000000000357	
128	0.4000033382619	0.4000000756268	0.4000000003101	0.4000000000473	0.4000000000134	0.4000000000028	0.4000000000009	0.4000000000004

الجدول (2) حساب التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1 y\sqrt{1-xy}\,dxdy$ . .

أما التكامل $I=\int_0^1\int_0^1 \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$ فهو معتل المكامل عندما $(x,y)=(0,0)$ ونوع الاعتلال نسبي .

لذا فان صيغة حدود التصحيح باستخدام الصيغة (15)تكون كالآتي :-

$$E(h)=a_1h+a_2h^2+a_3h^4+...+Ah^2+Bh^4+...$$
$$=ah+c_1h^2+c_2h^4+...$$

حيث $A,B,...$ و a_i ، c_i ثوابت ، $i=1,2,...$.

وقد حصلنا على النتائج المدونة في الجدول(3) .

$n=m$	MM قيم قاعدة	K=1	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10
1	2						
2	2.133333333333	2.266666666667					
4	2.198734541777	2.264135750221	2.263292111406				
8	2.231344963183	2.263955384589	2.263895262712	2.263935472799			
16	2.247644606160	2.263944249137	2.263940537320	2.263943555627	2.263943683926		
32	2.255794079937	2.263943553714	2.263943321906	2.263943507546	2.263943506782	2.263943506088	
64	2.259868795095	2.263943510252	2.263943495765	2.263943507356	2.263943507353	2.263943507355	2.263943507356

الجدول(3)حساب التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1 \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$.

نستنتج من الجدول عندما $n=m=64$ فان القيمة بقاعدة MM صحيحة لمرتبتين عشريتين بينما باستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة تكون صحيحة لإحدى عشر مرتبة عشرية بعدد فترات جزئية 2^{12} $(n=m=64)$.

علما ان أفضل نتيجة حصلت عليها ضياء [11] كانت فيها قيمة التكامل صحيحة لتسعة مراتب عشرية عندما $m=128$ و $n=64$ أي بـ (2^{13} فترة جزئية) باستعمال طريقة $RM(RS)$ بحسب الحالتين الأولى والثانية .

5 . المناقشة

نستنتج من خلال نتائج وجداول هذا البحث انه عند حساب التكاملات الثنائية بقاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين عندما n تكون مساوية لـ m و $h=\bar{h}$ إن هذه القاعدة (قاعدة MM) تعطي قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات باستعمال عدد من الفترات الجزئية بدون استعمال عملية التعديل الخارجي عليها . كما يظهر ذلك بوضوح أكثر في حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل وكذلك ذات مكاملات معتلة المشتقات الجزئية في نقطة أو أكثر من منطقة التكامل .

على سبيل المثال ، فإننا في التكامل الأول حصلنا على قيمة صحيحة لأربع مراتب عشرية صحيحة عندما $m = n = 16$. وحصلنا في التكاملات المعتلة المشتقة ، على سبيل المثال ، في التكامل الثاني على قيمة صحيحة لخمس مراتب عشرية عندما n=m=128 على الترتيب.

في حين حصلنا على اقل عدد من المراتب في حالة التكاملات المعتلة في نقطة من منطقة التكامل . على سبيل المثال ، في التكامل الثالث حصلنا على مرتبتين عشريتين عندما $m = n = 64$.

إلا إن الجداول أوضحت انه من خلال تعجيل رومبرك لقاعدة MM المذكورة أعطت نتائج أفضل من حيث سرعة الاقتراب بعدد قليل من الفترات الجزئية نسبياً إلى قيم التكاملات الحقيقية .

إذ كانت صحيحة لإحدى عشر مرتبة عشرية بالنسبة للتكامل الثالث بـ (2^{12} فترة جزئية) . وكذلك في حالة التكاملات ذات مكاملات مستمرة أو معتلة المشتقات الجزئية فقد أوضحت الجداول إن طريقة تعجيل رومبرك ذات أهمية كبيرة في تعجيل اقتراب القيم إلى القيم الحقيقية للتكامل

وقد لاحظنا انه مهما كان سلوك المكامل فقد تبين من خلال نتائج التكاملات المختارة إن الطريقة التي أسميناها RMM كانت الأفضل من حيث الدقة وسرعة اقتراب القيم إلى القيم الحقيقية للتكاملات (قيم m و n قليلة نسبياً) بالنسبة لبقية الطرائق التي استخدمتها ضياء[13] التي أثبتت أفضليتها على بقية الطرائق التي اتبعها الباحثون محمد[13] ومحمد[4] والطائي [10] ومحمد وآخرون [5] .

ففي التكامل الأول حيث إن المكامل دالة مستمرة حصلنا على قيمة صحيحة لثمان مراتب عشرية بـ (2^6 فترة جزئية) وحصلت ضياء[13] على ست مراتب عشرية صحيحة بنفس العدد من الفترات الجزئية في جميع الطرائق والحالات .

ففي التكامل الثاني المعتل المشتقة ونوع الاعتلال جذري عندما $(x, y) = (1,1)$ فقد حصلنا على قيمة صحيحة لعشرة مراتب عشرية بـ (2^{12} فترة جزئية) وحصلت ضياء[13] على قيمة صحيحة لتسع مراتب عشرية بنفس العدد من الفترات الجزئية حيث كانت أفضل نتيجة عند استخدامها طريقة $RM(RS)$ حسب الحالة الأولى

أما في التكامل الثالث المعتل المكامل ونوع الاعتلال نسبي عندما $(x, y) = (0,0)$ فقد حصلنا على قيمة صحيحة لإحدى عشر مرتبة عشرية بـ (2^{12}) فترة جزئية في حين حصلت ضياء[13] على قيمة صحيحة لتسع مراتب عشرية أي بـ (2^{13})فترة جزئية (باستعمال طريقة $RM(RS)$ بحسب الحالتين الأولى والثانية حيث إن هذه الطريقة أعطت أفضل النتائج بالنسبة لهذا التكامل)

كما لاحظنا إن صيغة الخطأ في طريقة RMM تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x, y)$ فقط بينما تعتمد صيغة الخطأ في الطرائق التي استخدمها الباحثين اعلاه على المشتقة الجزئية بالنسبة لـ x لإيجاد صيغة الخطأ $\overline{E}(\overline{h})$ (على البعد الداخلي) أما صيغة الخطأ $E(h)$ (البعد الخارجي y) فإنها تعتمد على إيجاد التكامل الداخلي وتحويل الدالة إلى دالة بالمتغير y ثم إيجاد صيغة الخطأ لهذه الدالة حيث تعتمد على المشتقة .

فلو كان من غير الممكن مكاملة التكامل الداخلي فان عملية إيجاد صيغة الخطأ $E(h)$ تصبح غير ممكنة ولهذا فان طريقة RMM تكون أفضل في هذه الحالة من ناحية صيغة الخطأ .

كما وجدنا إن عملية حساب التكاملات الثنائية بطريقة RMM تستغرق وقت اقل بكثير مما تستغرقه عملية حسابها باستعمال الطرائق التي استخدمها الباحثون أعلاه وذلك لان الطرائق التي استخدموها تعتمد على إعطاء قيمة لـ m ثم يبدأ البرنامج

بالبحث عن قيمة لـ n وعند كل قيمة لـ n يتم حساب القيمة التقريبية للتكامل حسب القاعدة المطبقة ثم تحسن القيم باستخدام طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة إلى أن يحصل على قيمة يكون فيها الخطأ المطلق اصغرمن أو يساوي قيمة معينة أسموها Eps (على البعد الداخلي). ولنفرض انه تم الحصول على هذه القيمة عندما $n=8$ و $m=1$ (على سبيل المثال) فسوف يتم تثبيت هذه القيمة في الجدول ثم يقوم البرنامج بإعطاء قيمة جديدة لـ m ويبدا بالبحث عن قيمة لـ n وبنفس الطريقة أعلاه يتم الحصول على قيمة جديدة وعلى فرض انه تم الحصول على هذه القيمه عندما n=4وm=2 ثم يتم تحسين القيمتين المحسوبتين في أعلاه بطريقة تعجيل رومبرك وهكذا بالنسبه لبقية قيم m إلى أن يتم الحصول على قيمة يكون فيها الخطأ المطلق اصغرمن أو يساوي قيمة معينة أسموها $Eps1$ (على البعد الخارجي) .

6.References

[1] Fox L. , " Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp. 87-93 , 1967 .

[2] Fox L. And Linda Hayes , " On the Definite Integration of Singular Integrands " SIAM REVIEW. ,12 , pp. 449-457 , 1970 .

[3] Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- and Two-Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , the Technical University of Denmark Lyngby , pp. 1-12 ,1973 .

[4] Mohammed A. H. , "Evaluation of Double Integrations " comput J. Vol. 7 , No.3 , pp. 21-28 , 2002 .

[5] Mohammed A. H. , Hayder A. K. and Hassen A. F. " On The Numerical Integration ", an article accepted by scientific conference of Morocco ,2009

[6] Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , BLASDELL Puplishing Company , pp. 1-2 , 599,113 , chapter 5 , 1975 .

[7] Sastry S. S. , " Introductory Methods of Numerical Analysis " , New Delhi, pp 5-7 , 2008

[8] Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " comput J.15 , pp. 360 , 361 , 1972 .

[9] WIKIPEDIA . The Free Encyclopedia .[online] available from WWW:< URL :http:// en . wikipedia.org / wiki / Taylor – series .

[10] الطائي ، علية شاني ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية معتلة " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،2005 .

[11] ضياء ، عذراء محمد ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2009 .

[12] فرانك آيرز ، " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " ، دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين

[13] محمد ، علي حسن ، " إيجاد قيم تكاملات معتلة المكامل " رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى جامعة البصرة ، 1984.

Numerically approach for calculate of double integrals

Ali H.Mohammed *Batool H.Aghaar*
Collage of Education for Girls
Department of Mathematics

Abstract

The main aim of this thesis to find values of the double and triple integrals numerically with continuous integrands or improper (singular) of the partial derivatives or improper at one point or more of region of the integration .

Also in this thesis , we find general formula of the errors by using behaviour of the integrands and new approach is different on the previous approached by Mohammed [13] , Alttai [10] , Dayaa [11] and others .

We have introduced three theorems (cases) to find the correction errors bounds with respect to the double integration for all case of the integrand by depending on these correction errors .

We calculated the double integral and found the RMM method is composition method of using midpoint rule on the two dimensions interior x and exterior y with applying Romberg acceleration method on it when the number of subintervals of interval of interior integral equal to the number of subintervals of interval of exterior integral $\left(h=\bar{h}\right)$ such that $\bar{h}$ is the distances between coordinates of x and h is the distances between coordinates of y such that we can depend on it to calculate the double integrations , and given higher accuracy in the results by few subintervals and time less than the request time for the researchers in the same subject .