مجلة القادسية لعلوم الحاسوب والرياضيات المجلد(٨) العدد(٢)
السنة(٢٠١٦)

إيجاد حدود التصحيح المرافقة للقاعدة MMS لحساب التكاملات الثلاثية المعتلة المشتقة الجزئية أو المعتلة عدديا

صفاء مهدي موسى الجصاص
جامعة الكوفة
كلية التربية للبنات
قسم الرياضيات
Safaam.mua@uokufa.edu.iq

ندى احمد محمدطه الكرمي
جامعة الكوفة
كلية التربية للبنات
قسم الرياضيات
nadaa.kharmi@uokufa.edu.iq

حيدر عباس دحام الجنابي
جامعة الكوفة
كلية طب الاسنان
Haidera.janabi@uokufa.edu.iq

استلام البحث: ٢٠١٦/٦/٦ إرسال التعديلات: \\ قبول النشر: ٢٠١٦/٨/١٥

المستخلص

الهدف الرئيس من هذا البحث هو ايجاد طريقة عددية جديدة لحساب قيم التكاملات الثلاثية المعتلة المكامل في احد أو كلى حدي ألتكامل أو المستمر المكامل لكن معتل المشتقة في احد أو كلى حدي ألتكامل ، باستعمال قاعدة سمبسون على البعد الداخلي X و قاعدة النقطة الوسطى على البعدين الخارجي Z والأوسط Yمع تعجيل رومبرك ورمزنا لها بـ $RO(MMS)$ عندما عددالتقسيمات على البعد الخارجي مساوي لعددالتقسيمات على البعد الأوسط ومساوي لعددالتقسيمات على البعد الداخلي حيث حصلنا على دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً وبوقت اقصر.

Mathematics Subject Classifications: 65XX

الكلمات المفتاحية

Numerical integration 65D30 ; Singular integrals 32A55 ; Romberg Accelerating 65B99 ; Taylor series 30K05;

1.المقدمة

غالبا ما تنشأ الحاجة لإيجاد قيمة التكامل المحدد الى دالة ليس لها عكس تفاضل صريح او لها عكس تفاضل لا يمكن إيجاد قيمته بسهولة او قيمها معروفة بجدول . تسمى الطريقة الأساسية المشتملة في التقريب $\int_a^b f(x)dx$ بالتربيع العددي ، وتستعمل المجموع الذي من نوع $\sum_{1=0}^{n} a_i f(x)$ لتقريب $\int_a^b f(x)dx$ ، ريتشارد بوردين [6] . وبذلك لابد من الحصول على بعض الطرق العددية لايجاد قيمة التكامل المحدد لدالة ما ومنها طرائق نيوتن – كوتس .

و لقد عمل الكثير من الباحثين في هذا المجال ومنهم من عمل في مجال التكاملات الثلاثية ففي عام2009 قدمت ضياء [7] أربع طرائق عددية مركبة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى (RM) على البعد الخارجي (Z) و $RS(RS), RS(RM), RM(RM), RM(RS)$ على البعد الأوسط (Y) والبعد الداخلي (X) ورمزت لها بالرموز $RMRM(RS)$، $RMRS(RM)$، $RMRM(RM)$ و $RMRS(RS)$ وقد توصلت إلى إن الطريقة المركبة من قاعدة سمبسون مع تعجيل رومبرك على البعدين الداخلي والأوسط وقاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي

$RMRS(RS)$ هي الأفضل عند حساب تكاملات ثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المستخدمة والزمن..وكذلك سلطت الضوء على إيجاد قيمة التكامل الثلاثي المعتلة فقد استخدمت طرائق مركبة وهي طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على التكامل الخارجي (البعد z) وكل من الطرائق $RM(RS)$ ، $RM(RM)$ و $RS(RM)$ فضلاً عن طريقة $RS(RS)$ على التكامل الأوسط (البعد y) والتكامل الداخلي (البعد x)مع إلغاء الاعتلال على البعدين الأوسط والداخلي y و x وهذه الطرائق هي طريقة $RMRM(RS)$ ، $RMRM(RM)$ ، $RMRS(RM)$ و $RMRS(RS)$ وكانت النتائج جيدة وقد توصلت إلى إن الطريقة المركبة من قاعدة سمبسون مع تعجيل رومبرك على البعدين الداخلي والأوسط وقاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي هي الأفضل عند حساب تكاملات مستمرة او مستمرة لكن مشتقاتها معتلة أو تكاملات مكاملاتها معتلة (التي من الممكن جعل اعتلالها في البعد الخارجي z فقط) .

و قدمت عكار [8] في عام 2010 صيغة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية وذلك باستعمال قاعدة النقطة الوسطى على الأبعاد الثلاثة X وY و Z عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وحسنت النتائج باستخدام تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق الصيغة المشتقة و ورمزت لها بالرمز $RMMM$ وحصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة وبفترات جزئية قليلة نسبياً.

وفي عام 2013 قدم محمد وآخرون [9] صيغة عددية جديدة لحساب قيم التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وذلك باستعمال قاعدة سمبسون على الأبعاد الثلاثة X وY وZ مع تعجيل رومبرك عندما تكون عدد الفترات الجزئية للابعاد الثلاثة X وY وZ متساوية ولقد رمزوا للطريقة بـ($RSSS$) وحصلوا على نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة اقتراب القيم التقريبية إلى القيم الدقيقة للتكاملات وبفترات جزئية قليلة نسبياً.

وكذلك في العام نفسه قدمت هلال [10] سبع نظريات لحساب قيم التكاملات الثلاثية عدديا بالاعتماد على قاعدتي شبه المنحرف و النقطة الوسطى ولتحسين النتائج استخدمت تعجيلي رومبرك و ريجاردسون على القيم الناتجة من تطبيق الصيغ المشتقة وقد رمزت للصيغ بـ (MTT , TTM, TMT, TTT, TMM, MTM, MMT) ، وحصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة وبفترات جزئية قليلة نسبياً.

وكذلك قدمت كاظم [11] ست قواعد لايجاد نتائج التكاملات الثلاثية مستخدمة قاعدتي شبه المنحرف وسمبسون واستعملت تعجيلي رومبرك و ريجاردسون لتحسين نتائج القواعد المقدمة وهذه القواعد هي
(STT, TTS, TST, TSS, STS, SST)
،وكانت النتائج التي حصلت عليها جيدة من حيث الدقةوسرعة الاقتراب .

بينما في عام 2014 قدم شبر [12] ست قواعد لحساب قيم التكاملات الثلاثية عدديا مستفيدا من قواعد شبه المنحرف و النقطة الوسطى وسمبسون مع تعجيلي رومبرك و ريجاردسون ورمز لقواعده بالرموز
(SMT, TMS, TSM, STM, MTS, MST)
وحصل على نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب .

وفي عام 2014 قدمت موسى [13] طريق عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية المستمرة معتمدة على قاعدتي سمبسون والنقطة الوسطى حيث (قاعدة سمبسون) على البعد الداخلي X و (قاعدة النقطة الوسطى) على البعدين الخارجي Z والأوسط Y ورمزت لهذه الطريقة MMS ولقد حسنت النتائج باستخدام تعجيلي رومبرك وايتكن ، وكانت النتائج

التي حصلت عليها جيدة من حيث الدقة وعدد فترات التجزئة .

أما في هذا البحث قدمنا طريقة عددية لحساب القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية ذات المكاملات معتلة المشتقة الجزئية أو المعتلة وحدود التصحيح لها ، وهذه الطريقة ناتجة من تطبيق قاعدتين من قواعد نيوتن- كوتس وهما (قاعدة سمبسون) على البعد الداخلي X و(قاعدة النقطة الوسطى) على البعدين الخارجي Z والأوسط Y و، عندما $w=w_1=w_2$ حيث (wعددالتقسيمات على البعد الخارجي Z و w_1عددالتقسيمات على البعد الأوسط Y و w_2عددالتقسيمات على البعد الداخلي X)ثم حسنا النتائج باستعمال تعجيل رومبرك وحصلنا على نتائج اكثر دقة وبعدد فترات جزئية قليلة .

2- قاعدتا سمبسون والنقطة الوسطى وحدود التصحيح المرافقة لهما

لنفرض التكامل J مكتوب بالصيغة الآتية

$$J=\int_{x_0}^{x_w} g(x)dx = \beta(\lambda)+\zeta_\beta(\lambda)+\Upsilon_\beta$$

فوكس [1]

حيث $\beta(\lambda)$ تمثل القاعدة العددية لحساب قيمة التكامل J و الرمز β يرمز لنوع القاعدة (حيث β تعتمد على λ ، $\left(\lambda=\frac{x_0-x_w}{w}\right)$ ، $\zeta_\beta(\lambda)$ هي سلسلة حدود التصحيح المرافقة لقاعدة Correction terms $\beta(\lambda)$. Υ_β هو المتبقي Remainder والمتعلق بالبتر Truncation من $\zeta_\beta(\lambda)$ بعد استعمال حدود معينة من عدة $E_G(\lambda)$

فان $\beta(\lambda)$ لصيغ نيوتن – كوتس هي كالاتي

أ- قاعدة النقطة الوسطى $M(\lambda)$

$$M(\lambda)=\sum_{i=0}^{w-1} g(x_i+\tfrac{\lambda}{2})$$

ب- قاعدة سمبسون $S(\lambda)$

$$S(\lambda)=\frac{\lambda}{3}\left[g(x_w)+g(x_0)+2\sum_{i=1}^{\frac{w}{2}-1} g(x_{2i})+4\sum_{i=1}^{\frac{w}{2}-1} g(x_{2i+1})\right]$$

ان لحدود التصحيح اهمية كبيرة في تحسين قيمة التكامل وتعجيل اقتراب القيمة العددية للتكامل من القيمة التحليلية او الدقيقة وبذلك عمل العالم فوكس [2] وكذلك الباحثة ضياء [7] على ايجاد سلاسل حدود التصحيح المرافقة لقواعد نيوتن - كوتس للتكاملات المستمرة او المعتلة في حد او كلي حدي فترة التكامل او المستمرة لكن معتلة المشتقة في حد واحد او كلي حدي فترة التكامل

1- حدود التصحيح لقاعدتي سمبسون $S(\lambda)$ و النقطة الوسطى $M(\lambda)$ للتكاملات المستمرة

سلسلة حدود التصحيح المرافقة لقاعدة سمبسون $S(\lambda)$

$$A_S\lambda^4+B_S\lambda^6+C_S\lambda^8+\cdots$$

سلسلة حدود التصحيح المرافقة لقاعدة النقطة الوسطى $M(\lambda)$

$$C_M\lambda^2+C_M\lambda^4+C_M\lambda^6+\cdots$$

إن $A_M, B_M, \ldots, A_S, B_S, \ldots$ ثوابت تعتمد على قيم مشتقات الدالة g في النقطة $x=x_w$. فوكس [2]

2- حدود التصحيح لقاعدتي سمبسون $S(\lambda)$ و النقطة الوسطى $M(\lambda)$ للتكاملات مستمرة المكامل لكن معتلة المشتقة في حد واحد من نهاية فترة التكامل ، إذ إن الدالة $g(x)$ مستمرة في فترة التكامل $[x_0, x_w]$ ومعتلة المشتقة في النقطة $x=x_0$.

ان سلسلة حدود التصحيح لقاعدة النقطة الوسطى عندما $g'(x_0)$ غير معرفة تكون :-

$$\zeta_M(\lambda)=\left[-\frac{\lambda^2}{6}D+\frac{\lambda^3}{6}D^2-\frac{23\lambda^4}{360}D^3+\cdots\right]g(x_1)$$
$$+A_M\lambda^2+B_M\lambda^4+\cdots$$

وان سلسلة حدود التصحيح لقاعدة سمبسون عندما $g'(x_0)$ غير معرفة تكون :-

$$\zeta_S(\lambda)=\left[\frac{\lambda^4}{180}D^3-\frac{\lambda^5}{180}D^4+\frac{2\lambda^6}{945}D^5-\cdots\right]g(x_1)$$
$$+A_S\lambda^4+B_S\lambda^6+\cdots$$

إذ إن ... A_S, B_S, ... A_M, B_M, ثوابت تعتمد على قيم مشتقات الدالة g في النقطة $x = x_w$. فوكس [1]

أما سلسلة حدود التصحيح للتكامل مع وجود الاعتلال في المشتقة عند النهاية العليا للتكامل(أي عند النقطة $x = x_w$) باستعمال قاعدة النقطة الوسطى وقاعدة سمبسون على التوالي تكون كالاتي

$$\zeta_M(\lambda) = \left[-\frac{\lambda^2}{6} D - \frac{\lambda^3}{6} D^2 - \frac{23\lambda^4}{360} D^3 - \cdots \right] g(x_{w-1}) + A_M \lambda^2 + B_M \lambda^4 + \cdots$$

$$\zeta_S(\lambda) = \left[-\frac{\lambda^4}{180} D^3 - \frac{\lambda^5}{180} D^4 - \frac{2\lambda^6}{945} D^5 - \cdots \right] g(x_{w-1}) + A_S \lambda^4 + B_S \lambda^6 + \cdots$$

إذ أن ... A_S, B_S, ... A_M, B_M, ثوابت تعتمد على قيم مشتقات الدالة $g(x)$ في النقطة $x = x_0$ فوكس[1].

بينما اذا كانت الدالة g(x) معتلة المشتقة في النقطتين $x = x_0$ و $x = x_w$ ومستمرة في فترة التكامل (x_1, x_{w-1}).

فان سلسلة حدود التصحيح لقاعدة النقطة الوسطى هي :-

$$\zeta_M(\lambda) = \left(-\frac{\lambda^2}{6} D + \frac{\lambda^3}{6} D^2 + \cdots \right) g(x_1) + \left(-\frac{\lambda^2}{6} D - \frac{\lambda^3}{6} D^2 - \cdots \right) g(x_{w-1})$$

وكذلك سلسلة حدود التصحيح لقاعدة سمبسون هي :-

$$\zeta_S(\lambda) = \left(\frac{\lambda^4}{180} D^3 - \frac{\lambda^5}{180} D^4 + \cdots \right) g(x_1) + \left(-\frac{\lambda^4}{12} D^3 - \frac{\lambda^5}{12} D^4 - \cdots \right) g(x_{w-1})$$

ضياء [7] .

3- تعجيل رومبرك Romberg Accelerating

بفرض انه لدينا التكامل الاتي

$$J = \int_{x_0}^{x_w} g(x)dx$$

فإذا حسبنا قيمة التكامل J لقيمتين مختلفتين لـ λ هما λ_1, λ_2 ولنفرض ان احدى القيمتين هي β_1 و الثانية هي β_2 باستخدام λ_1, λ_2 على التوالي تكون J كالاتي

$$J = \int_{x_0}^{x_w} g(x)dx = \beta_1 + \sum_{j=k}^{\infty} A_j \lambda_1^j \qquad \cdots(1)$$

$$J = \int_{x_0}^{x_w} g(x)dx = \beta_2 + \sum_{j=k}^{\infty} A_j \lambda_2^j \qquad \cdots(2)$$

حيث β_1, β_2 قيمتان تقريبيتان للتكامل بإستخدام إحدى طرائق نيوتن - كوتس، J قيمة التكامل الدقيقة ، $\sum_{j=k}^{\infty} A_j \lambda_1^j$ سلسلة حدود التصحيح الممكن اضافتها .

وبحل المعادلة (1) و(2) بالنسبة الى J ينتج الاتي

$$J = \int_{x_0}^{x_w} g(x)dx = \frac{\lambda_1^k \beta_2 - \beta_1}{\lambda_1^k - \lambda_2^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} A_j \frac{\lambda_1^k \lambda_2^j - \lambda_2^k \lambda_1^j}{\lambda_1^k - \lambda_2^k} \cdots(3)$$

وبفرض انه $\lambda_2 = 2\lambda_1$ في المعادلة (3) يكون لدينا

$$J = \frac{2^k \beta_2 - \beta_1}{2^k - 1} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2^k - 2^j}{2^k - 1} A_j \lambda^j$$

حيث $\lambda = \frac{x_w - x_0}{w}$ ، w عدد فترات التجزئة المجزء اليها فترة التكامل $[x_0, x_w]$. رالستون [3]

$\frac{2^k - 2^j}{2^k - 1} A_j$ ثوابت لاتعتمد على λ ، k هي قوى λ في سلسلة حدود التصحيح . فوكس [2] ، فوكس [1]

ومنها يكون لدينا

$$J = \frac{2^k \beta_2 - \beta_1}{2^k - 1}$$

والصيغة السابقة هي صيغة تعجيل رومبرك بالاعتماد على حد واحد من حدود التصحيح بشكل متكرر

4- القاعدة العددية MMS وحدود التصحيح بالنسبة لها

لاشتقاق قاعدة حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات عدديا نفرض إن التكامل الثلاثي J معرف كالآتي

$$J=\int_{z_0}^{z_w}\int_{y_0}^{y_w}\int_{x_0}^{x_w} g(x,y,z)\,dxdydz \qquad \ldots(1)$$

حيث أن $g(x,y,z)$ مكامل معتل او مستمر لكن معتل المشتقة في احدى التكامل (x_0,y_0,z_0) و (x_w,y_w,z_w) .

بشكل عام يمكن كتابة التكامل J بالشكل الأتي :

$$J=\int_{z_0}^{z_w}\int_{y_0}^{y_w}\int_{x_0}^{x_w} g(x,y,z)\,dxdydz=\beta\beta\bar{\beta}(\lambda) \qquad \ldots(2)$$

حيث $\beta\beta\bar{\beta}(\lambda)$ تمثل قيمة التكامل عددياً باستخدام الصيغة MMS ، موسى [13] و

$$\lambda=\frac{(x_0-x_w)}{w}=\frac{(y_0-y_w)}{w}=\frac{(z_0-z_w)}{w}$$

يمكن الحصول على صيغة هذه الطريقة من خلال تطبيق قاعدة سمبسون على البعد الداخلي x وقاعدة النقطة الوسطى على البعدين الوسطي y والخارجي z عندما عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[x_0,x_w]$ مساوية الى عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[y_0,y_w]$ وكذلك الفترة $[z_0,z_w]$ أي إن $(\bar{\lambda}=\bar{\bar{\lambda}}=\lambda)$. حيث ان

$$\lambda=\frac{x_w-x_0}{w} ، \quad \bar{\lambda}=\frac{y_w-y_0}{w} ، \quad \bar{\bar{\lambda}}=\frac{z_w-z_0}{w}$$

$$\boxed{\begin{aligned}MMS&=\int_{z_0}^{z_w}\int_{y_0}^{y_w}\int_{x_0}^{x_w} g(x,y,z)\,dxdydz=\\&\frac{\lambda^3}{3}\sum_{k=0}^{w-1}\sum_{j=0}^{w-1}\Bigg[g(x_0,y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_k+\tfrac{\lambda}{2})+g(x_w,y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_k+\tfrac{\lambda}{2})+\\&4\sum_{i=1}^{\frac{w}{2}}g(x_{(2i-1)},y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_k+\tfrac{\lambda}{2})+2\sum_{i=1}^{\frac{w}{2}-1}g(x_{(2i)},y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_k+\tfrac{\lambda}{2})\Bigg]\\&+\mu_1\lambda^2+\mu_2\lambda^4+\mu_3\lambda^6+\cdots\end{aligned}}$$

وصيغة حدود التصحيح (صيغة الخطأ) هي:-

$$I-MMS(\lambda)=\mu_1\lambda^2+\mu_2\lambda^4+\mu_3\lambda^6+\cdots$$

حيث أن $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots$ ثوابت.

$$x_{(2i-1)}=x_0+(2i-1)\lambda\ ,\quad i=1,2,\ldots,\frac{w}{2}$$
و
$$x_{(2i)}=x_0+(2i)\lambda\ ,\quad i=1,2,\ldots,\frac{w}{2}\text{-}1$$
$$z_k=z_0+k\lambda\ ,\quad k=0,1,2,\ldots,w$$
و
$$y_j=y_0+j\lambda\ ,\quad j=0,1,2,\ldots,w$$

موسى [13]

5- أيجاد حدود التصحيح المرافقة للقاعدة MMS عندما يكون المكامل معتل المشتقة في الحد الأسفل من التكامل

نفرض ان لدينا التكامل الثلاثي الاتي

$$J=\int_{z_0}^{z_w}\int_{y_0}^{y_w}\int_{x_0}^{x_w} g(x,y,z)\,dxdydz$$

بما ان الدالة معرفة عند النقطة (x_2,y_2,z_2) اذن نستطيع نشر الدالة $g(x,y,z)$ باستخدام متسلسلة تايلور حول النقطة (x_2,y_2,z_2) و بذلك يكون لدينا

$$J=\int_{z_0}^{z_{2w}}\int_{y_0}^{y_{2w}}\int_{x_0}^{x_{2w}} g(x,y,z)\,dxdydz=$$

$$J=\int_{z_0}^{z_2}\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2} g(x,y,z)\,dxdydz+\int_{z_2}^{z_{2w}}\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2} g(x,y,z)\,dxdydz$$
$$+\int_{z_0}^{z_{2w}}\int_{y_2}^{y_{2w}}\int_{x_0}^{x_2} g(x,y,z)\,dxdydz+\int_{z_0}^{z_{2w}}\int_{y_0}^{y_{2w}}\int_{x_2}^{x_{2w}} g(x,y,z)\,dxdydz$$

بما إن الدالة معرفة عند النقطة (x_2,y_2,z_2) إذن نستطيع نشر الدالة $g(x,y,z)$ باستخدام متسلسلة تايلور حول النقطة (x_2,y_2,z_2) وبذلك يكون لدينا

$$g(x,y,z)=\Big[1+(x-x_2)D_x+(y-y_2)D_y+(z-z_2)D_z+\frac{(x-x_2)^2}{2!}D_x^2+\frac{(y-y_2)^2}{2!}D_y^2+\frac{(z-z_2)^2}{2!}D_z^2+(x-x_2)(y-y_2)D_xD_y+(x-x_2)(z-z_2)D_xD_z+(y-y_2)(z-z_2)D_yD_z+\frac{(x-x_2)^3}{3!}D_x^3+\frac{(y-y_2)^3}{3!}D_y^3+\frac{(z-z_2)^3}{3!}D_z^3+\frac{(x-x_2)^2(y-y_2)}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x-x_2)^2(z-z_2)}{2!}D_x^2D_z+\frac{(x-x_2)(y-y_2)^2}{2!}D_xD_y^2+\frac{(y-y_2)^2(z-z_2)}{2!}D_y^2D_z+\cdots\Big]g(x_2,y_2,z_2)\qquad\cdots(3)$$

وبمكاملة المعادلة (3) في المنطقة

$$\int_{z_0}^{z_2}\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2} g(x,y,z)\,dxdydz=\Big[6\lambda^3+8\lambda^4D_x+8\lambda^4D_y+8\lambda^4D_z+\frac{16\lambda^5}{3}D_x^2+\frac{16\lambda^5}{3}D_z^2+\frac{16\lambda^5}{3}D_z^2+8\lambda^5D_xD_y+8\lambda^5D_xD_z+8\lambda^5D_yD_z-\frac{8\lambda^6}{3}D_x^3-\frac{8\lambda^6}{3}D_y^3-\frac{8\lambda^6}{3}D_z^3-\frac{16\lambda^6}{3}D_x^2D_y-\frac{16\lambda^6}{3}D_x^2D_z+\cdots\Big]g(x_2,y_2,z_2)\qquad\cdots(4)$$

نعوض عن x بـ x_1 وعن y بـ $y_0+\frac{3\lambda}{2}$ وعن z بـ $z_0+\frac{\lambda}{2}$ في المعادلة رقم (3)

$$g(x_1,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2})=\Big[1+(x_1-x_2)D_x+(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)D_y+(z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2)D_z+\frac{(x_1-x_2)^2}{2!}D_x^2+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_y^2+\frac{(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_z^2+(x_1-x_2)(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)D_xD_y+(x_1-x_2)(z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2)D_xD_z+(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)(z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2)D_yD_z+\frac{(x_1-x_2)^3}{3!}D_x^3+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^3}{3!}D_y^3+\frac{(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^3}{3!}D_z^3+\frac{(x_1-x_2)^2(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)}{2!}D_x^2D_y+\cdots\Big]g(x_2,y_2,z_2)\qquad\cdots(5)$$

نعوض عن x بـ x_0 وعن y بـ $y_0+\frac{\lambda}{2}$ وعن z بـ $z_0+\frac{\lambda}{2}$ في المعادلة رقم (3)

$$g(x_0,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2})=\Big[1+(x_0-x_2)D_x+(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2)D_y+(z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2)D_z+\frac{(x_0-x_2)^2}{2!}D_x^2+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_y^2+\frac{(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_z^2+(x_0-x_2)(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2)D_xD_y+(x_0-x_2)(z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2)D_xD_z+(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2)(z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2)D_yD_z+\frac{(x_0-x_2)^3}{3!}D_x^3+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^3}{3!}D_y^3+\frac{(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^3}{3!}D_z^3+\frac{(x_0-x_2)^2(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x_0-x_2)^2(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)}{2!}D_x^2D_z+\frac{(x_0-x_2)(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_xD_y^2+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^2(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)}{2!}D_y^2D_z+\frac{(x_0-x_2)(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_z^2D_x+\cdots\Big]g(x_2,y_2,z_2)\cdots(6)$$

نعوض عن x بـ x_0 وعن y بـ $y_0+\frac{\lambda}{2}$ وعن z بـ $z_0+\frac{3\lambda}{2}$ في المعادلة رقم (3)

$$\begin{aligned}
g(x_0,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2}) = \Big[& 1+(x_0-x_2)D_x+(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2)D_y \\
& +(z_0+\tfrac{3\lambda}{2}-z_2)D_z+\frac{(x_0-x_2)^2}{2!}D_x^2+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_y^2+ \\
& \frac{(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_z^2+(x_0-x_2)(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2)D_xD_y+(x_0-x_2) \\
& (z_0+\tfrac{3\lambda}{2}-z_2)D_xD_z+(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2)(z_0+\tfrac{3\lambda}{2}-z_2)D_yD_z+ \\
& \frac{(x_0-x_2)^3}{3!}D_x^3+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^3}{3!}D_y^3+\frac{(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^3}{3!}D_z^3+ \\
& \frac{(x_0-x_2)^2(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x_0-x_2)^2(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)}{2!}D_x^2D_z \\
& +\frac{(x_0-x_2)(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_xD_y^2+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^2(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)}{2!} \\
& D_y^2D_z+\frac{(x_0-x_2)(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_z^2D_x+\cdots \Big] g(x_2,y_2,z_2)\cdots(7)
\end{aligned}$$

نعوض عن x بـx_2 وعن y بـ $y_0+\frac{\lambda}{2}$ وعن
z بـ $z_0+\frac{\lambda}{2}$ في المعادلة رقم (3)

$$\begin{aligned}
g(x_2,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) = \Big[& 1+(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2)D_y+(z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2) \\
& D_z+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_y^2+\frac{(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_z^2+(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2) \\
& (z_0+\tfrac{h}{2}-z_2)D_yD_z+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^3}{3!}D_y^3+\frac{(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^3}{3!}D_z^3+ \\
& \frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^2(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)}{2!}D_y^2D_z+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^4}{4!}D_y^4+ \\
& \frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_yD_z^2+\cdots \Big] g(x_2,y_2,z_2) \quad \cdots(8)
\end{aligned}$$

نعوض عن x بـx_2 وعن y بـ $y_0+\frac{\lambda}{2}$ وعن
z بـ $z_0+\frac{3\lambda}{2}$ في المعادلة رقم (3)

$$\begin{aligned}
g(x_2,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2}) = \Big[& 1+(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2)D_y+(z_0+\tfrac{3\lambda}{2}-z_2) \\
& D_z+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_y^2+\frac{(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_z^2+(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2) \\
& (z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2)D_yD_z+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^3}{3!}D_y^3+\frac{(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^3}{3!}D_z^3 \\
& +\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^2(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)}{2!}D_y^2D_z+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^4}{4!} \\
& D_y^4+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_yD_z^2+\cdots \Big] g(x_2,y_2,z_2)\cdots(9)
\end{aligned}$$

نعوض عن x بـx_0 وعن y بـ $y_0+\frac{3\lambda}{2}$ وعن
z بـ $z_0+\frac{\lambda}{2}$ في المعادلة رقم (3)

$$\begin{aligned}
g(x_0,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) = \Big[& 1+(x_0-x_2)D_x+(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)D_y \\
& +(z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2)D_z+\frac{(x_0-x_2)^2}{2!}D_x^2+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_y^2+ \\
& \frac{(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_z^2+(x_0-x_2)(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)D_xD_y+(x_0-x_2) \\
& (z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2)D_xD_z+(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)(z_0+\tfrac{h}{2}-z_2)D_yD_z+ \\
& \frac{(x_0-x_2)^3}{3!}D_x^3+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^3}{3!}D_y^3+\frac{(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^3}{3!}D_z^3+ \\
& \frac{(x_0-x_2)^2(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x_0-x_2)^2(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)}{2!}D_x^2D_z \\
& \frac{(x_0-x_2)(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_xD_y^2+\cdots \Big] g(x_2,y_2,z_2) \qquad \cdots(10)
\end{aligned}$$

نعوض عن x بـx_2 وعن y بـ $y_0+\frac{3\lambda}{2}$ وعن
z بـ $z_0+\frac{\lambda}{2}$ في المعادلة رقم (3)

$$\begin{aligned}
g(x_2,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) = \Big[& 1+(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)D_y+ \\
& (z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2)D_z+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_y^2+\frac{(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_z^2 \\
& +(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)(z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2)D_yD_z+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^3}{3!}D_y^3 \\
& +\frac{(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^3}{3!}D_z^3+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^2(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)}{2!}D_y^2D_z \\
& +\frac{(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^4}{4!}D_z^4+\cdots \Big] g(x_2,y_2,z_2) \qquad \cdots(11)
\end{aligned}$$

نعوض عن x بـx_0 وعن y بـ $y_0+\frac{3\lambda}{2}$ وعن
z بـ $z_0+\frac{3\lambda}{2}$ في المعادلة رقم (3)

$$\begin{aligned}
g(x_0,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2}) = \Big[& 1+(x_0-x_2)D_x+(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)D_y \\
& +(z_0+\tfrac{3\lambda}{2}-z_2)D_z+\frac{(x_0-x_2)^2}{2!}D_x^2+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_y^2+ \\
& \frac{(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_z^2+(x_0-x_2)(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)D_xD_y+(x_0-x_2) \\
& (z_0+\tfrac{3\lambda}{2}-z_2)D_xD_z+(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)(z_0+\tfrac{3\lambda}{2}-z_2)D_yD_z+ \\
& \frac{(x_0-x_2)^3}{3!}D_x^3+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^3}{3!}D_y^3+\frac{(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^3}{3!}D_z^3+ \\
& \frac{(x_0-x_2)^2(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x_0-x_2)^2(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)}{2!}D_x^2 \\
& D_z+\frac{(x_0-x_2)(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_xD_y^2+\cdots \Big] g(x_2,y_2,z_2)\cdots(12)
\end{aligned}$$

نعوض عن x بـx_2 وعن y بـ $y_0+\frac{3\lambda}{2}$ وعن
z بـ $z_0+\frac{3\lambda}{2}$ في المعادلة رقم (3)

$$g(x_2,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2})=\Big[1+(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)D_y+(z_0+\tfrac{3\lambda}{2}-z_2)D_z+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_y^2+\frac{(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_z^2+(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)(z_0+\tfrac{3\lambda}{2}-z_2)D_yD_z+\frac{(x_2-x_2)^3}{3!}D_x^3+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^3}{3!}D_y^3+\frac{(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^3}{3!}D_z^3+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^2(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)}{2!}D_y^2D_z+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_yD_z^2+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^4}{4!}D_y^4+\frac{(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^4}{4!}D_z^4+\cdots\Big]g(x_2,y_2,z_2)\qquad\cdots(13)$$

نعوض عن x بـ x_1 وعن y بـ $y_0+\frac{\lambda}{2}$ وعن z بـ $z_0+\frac{\lambda}{2}$ في المعادلة رقم (3)

$$g(x_1,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2})=\Big[1+(x_1-x_2)D_x+(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2)D_y+(z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2)D_z+\frac{(x_1-x_2)^2}{2!}D_x^2+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_y^2+\frac{(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_z^2+(x_1-x_2)(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2)D_xD_y+(x_1-x_2)(z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2)D_xD_z+(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2)(z_0+\tfrac{\lambda}{2}-z_2)D_yD_z+\frac{(x_1-x_2)^3}{3!}D_x^3+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^3}{3!}D_y^3+\frac{(z_0+\frac{\lambda}{2}-z_2)^3}{3!}D_z^3+\frac{(x_1-x_2)^2(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)}{2!}D_x^2D_y+\cdots\Big]g(x_2,y_2,z_2)\qquad\cdots(14)$$

نعوض عن x بـ x_1 وعن y بـ $y_0+\frac{3\lambda}{2}$ وعن z بـ $z_0+\frac{3\lambda}{2}$ في المعادلة رقم (3)

$$g(x_1,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2})=\Big[1+(x_1-x_2)D_x+(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)D_y+(z_0+\tfrac{3\lambda}{2}-z_2)D_z+\frac{(x_1-x_2)^2}{2!}D_x^2+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_y^2+\frac{(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_z^2+(x_1-x_2)(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)D_xD_y+(x_1-x_2)(z_0+\tfrac{3\lambda}{2}-z_2)D_xD_z+(y_0+\tfrac{3\lambda}{2}-y_2)(z_0+\tfrac{3\lambda}{2}-z_2)D_yD_z+\frac{(x_1-x_2)^3}{3!}D_x^3+\frac{(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)^3}{3!}D_y^3+\frac{(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^3}{3!}D_z^3+\frac{(x_1-x_2)^2(y_0+\frac{3\lambda}{2}-y_2)}{2!}D_x^2D_y+\cdots\Big]g(x_2,y_2,z_2)\qquad\cdots(15)$$

نعوض عن x بـ x_1 وعن y بـ $y_0+\frac{\lambda}{2}$ وعن z بـ $z_0+\frac{3\lambda}{2}$ في المعادلة رقم (3)

$$g(x_1,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2})=\Big[1+(x_1-x_2)D_x+(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2)D_y+(z_0+\tfrac{3\lambda}{2}-z_2)D_z+\frac{(x_1-x_2)^2}{2!}D_x^2+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_y^2+\frac{(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^2}{2!}D_z^2+(x_1-x_2)(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2)D_xD_y+(x_1-x_2)(z_0+\tfrac{3\lambda}{2}-z_2)D_xD_z+(y_0+\tfrac{\lambda}{2}-y_2)(z_0+\tfrac{3h}{2}-z_2)D_yD_z+\frac{(x_1-x_2)^3}{3!}D_x^3+\frac{(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^3}{3!}D_y^3+\frac{(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)^3}{3!}D_z^3+\frac{(x_1-x_2)^2(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x_1-x_2)^2(z_0+\frac{3\lambda}{2}-z_2)}{2!}D_x^2D_z+\frac{(x_1-x_2)(y_0+\frac{\lambda}{2}-y_2)^2}{2!}D_xD_y^2+\cdots\Big]g(x_2,y_2,z_2)\cdots(16)$$

ومن المعادلة (4) إلى المعادلة (16) نحصل على

$$\int_{z_0}^{z_2}\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2} g(x,y,z)\,dxdydz=\frac{\lambda^3}{3}\Big[g(x_0,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2})+g(x_2,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2})+4g(x_1,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2})+g(x_0,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2})+g(x_2,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2})+4g(x_1,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2})+g(x_0,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2})+g(x_2,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2})+4g(x_1,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2})+g(x_0,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2})+g(x_2,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2})+4g(x_1,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2})\Big]+\Big[a_1\lambda^5\left(D_y^2+D_z^2\right)+a_2\lambda^7\left(D_x^4+D_y^4+D_z^4\right)+\cdots\Big]g(x_2,y_2,z_2)\qquad\cdots(17)$$

بما إن $g(x_2,y_2,z_2)=Eg(x_1,y_1,z_1)$

$$E=e^{\lambda D_x+\lambda D_y+\lambda D_z}=1+\lambda D_x+\lambda D_y+\lambda D_z+\frac{(\lambda D_x+\lambda D_y+\lambda D_z)^2}{2!}+\cdots$$

صفاء مهدي/ ندى احمد/ حيدر عباس

$$\int_{z_0}^{z_2}\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2} g(x,y,z)dxdydz = \frac{\lambda^3}{3}\Big[g(x_0,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_2,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_0,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_2,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_0,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_2,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_0,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_2,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2})\Big] + \Big[a_1\lambda^5\left(D_y^2+D_z^2\right) + a_2\lambda^7\left(D_x^4+D_y^4+D_z^4\right)+\cdots\Big]Eg(x_1,y_1,z_1) \quad \cdots(18)$$

$$\int_{z_0}^{z_2}\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2} g(x,y,z)dxdydz = \frac{\lambda^3}{3}\Big[g(x_0,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_2,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_0,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_2,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_0,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_2,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_0,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_2,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_0+\tfrac{3\lambda}{2})\Big] + \Big[b_1\lambda^5\left(D_y^2+D_z^2\right)+b_2\lambda^6\left(D_y^2D_x+D_z^2D_x\right)+b_2\lambda^7\left(D_x^4+D_y^4+D_z^4\right)+\cdots\Big]g(x_1,y_1,z_1)\cdots(19)$$

أما بالنسبة للتكاملات الثلاث الباقية فأنها مستمرة وطبقا لقاعدة MMS ، موسى [8] يكون لدينا

$$\int_{z_0}^{z_{2w}}\int_{y_2}^{y_{2w}}\int_{x_0}^{x_2} g(x,y,z)dxdydz = \sum_{i=0}^{w-1}\int_{z_{2i}}^{z_{2i+2}}\sum_{j=1}^{w-1}\int_{y_{2j}}^{y_{2j+2}}\int_{x_0}^{x_2} g(x,y,z)dxdydz =$$
$$\frac{\lambda^3}{3}\sum_{i=0}^{w-1}\sum_{j=1}^{w-1}\Big[g(x_0,y_{2j}+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_2,y_{2j}+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_{2j}+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_0,y_{2j}+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_2,y_{2j}+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_{2j}+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_0,y_{2j}+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_2,y_{2j}+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_{2j}+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_0,y_{2j}+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_2,y_{2j}+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_{2j}+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2})\Big] + \theta_1\lambda^2+\theta_2\lambda^4+\theta_3\lambda^6+\cdots \quad \cdots(20)$$

حيث $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots$ ثوابت قيمها لا تعتمد على λ

$$\int_{z_0}^{z_{2w}}\int_{y_0}^{y_{2w}}\int_{x_2}^{x_{2w}} g(x,y,z)dxdydz = \sum_{i=0}^{w-1}\int_{z_{2i}}^{z_{2i+2}}\sum_{j=0}^{w-1}\int_{y_{2j}}^{y_{2j+2}}\sum_{k=1}^{w-1}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} g(x,y,z)dxdydz$$
$$=\frac{\lambda^3}{3}\sum_{i=0}^{w-1}\sum_{j=0}^{w-1}\sum_{k=1}^{w-1}\Big[g(x_{2k},y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_{2k+2},y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + 4g(x_{2k+1},y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_{2k},y_j+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_{2k},y_j+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + 4g(x_{2k+1},y_j+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_{2k},y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_{2k},y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + 4g(x_{2k+1},y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_{2k},y_j+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_{2k},y_j+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + 4g(x_{2k+1},y_j+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2})\Big] + \upsilon_1\lambda^2+\upsilon_2\lambda^4+\upsilon_3\lambda^6+\cdots \quad \cdots(21)$$

حيث $\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3,\cdots$ ثوابت قيمها لا تعتمد على λ

$$\int_{z_2}^{z_{2w}}\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2} g(x,y,z)dxdydz = \sum_{i=1}^{w-1}\int_{z_{2i}}^{z_{2i+2}}\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2} g(x,y,z)dxdydz$$
$$=\frac{\lambda^3}{3}\sum_{i=1}^{w-1}\Big[g(x_0,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_2,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_0,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_2,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_0,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_2,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_0+\tfrac{\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_0,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + g(x_2,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2}) + 4g(x_1,y_0+\tfrac{3\lambda}{2},z_{2i}+\tfrac{3\lambda}{2})\Big] + \delta_1\lambda^2+\delta_2\lambda^4+\delta_3\lambda^6+\cdots \quad \cdots(22)$$

حيث $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\cdots$ ثوابت قيمها لا تعتمد على λ

ومن المعادلات (19و20 و21 و22) نحصل على

$$\boxed{\begin{aligned} MMS &= \int_{z_0}^{z_w}\int_{y_0}^{y_w}\int_{x_0}^{x_w} g(x,y,z)dxdydz = \\ &\frac{\lambda^3}{3}\sum_{k=0}^{w-1}\sum_{j=0}^{w-1}\Big[g(x_0,y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_k+\tfrac{\lambda}{2}) + g(x_w,y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_k+\tfrac{\lambda}{2}) \\ &+4\sum_{i=1}^{\frac{w}{2}} g(x_{(2i-1)},y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_k+\tfrac{\lambda}{2}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{w}{2}-1} g(x_{(2i)},y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_k+\tfrac{\lambda}{2})\Big] \\ &+\Big[b_1\lambda^5\left(D_y^2+D_z^2\right)+b_2\lambda^6\left(D_y^2D_x+D_z^2D_x\right)+ \\ &b_2\lambda^7\left(D_x^4+D_y^4+D_z^4\right)+\cdots\Big]g(x_1,y_1,z_1)+A_1\lambda^2+A_2\lambda^4+A_3\lambda^6+\cdots \end{aligned}}$$

حيث $b_1,b_2,\cdots,A_1,A_2,A_3\cdots$ ثوابت لا تعتمد على قيمة λ وتعتمد على قيمة المشتقات الجزئية للدالة g

وبالطريقة نفسها يمكن حدود التصحيح المرافقة لقاعدة حساب قيم التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المعتلة المشتقة الجزئية أو المعتلة في الحد الأعلى للتكامل $g(x,y,z)=g(x_w,y_w,z_w)$

$$
\begin{aligned}
MMS &= \int_{z_0}^{z_w}\int_{y_0}^{y_w}\int_{x_0}^{x_w} g(x,y,z)\,dxdydz = \\
&\frac{\lambda^3}{3}\sum_{k=0}^{w-1}\sum_{j=0}^{w-1}\Big[\ g(x_0,y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_k+\tfrac{\lambda}{2})+g(x_w,y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_k+\tfrac{\lambda}{2}) \\
&+4\sum_{i=1}^{\frac{w}{2}} g(x_{(2i-1)},y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_k+\tfrac{\lambda}{2})+2\sum_{i=1}^{\frac{w}{2}-1} g(x_{(2i)},y_j+\tfrac{\lambda}{2},z_k+\tfrac{\lambda}{2})\ \Big]+ \\
&\Big[\bar{b}_1\lambda^5\left(D_y^2+D_z^2\right)+\bar{b}_2\lambda^6\left(D_y^2D_x+D_z^2D_x\right)+ \\
&\bar{b}_2\lambda^7\left(D_x^4+D_y^4+D_z^4\right)+\cdots\Big]g(x_{w-1},y_{w-1},z_{w-1})+\bar{A}_1\lambda^2+\bar{A}_2\lambda^4+\cdots
\end{aligned}
$$

حيث $\bar{b}_1,\bar{b}_2,\cdots,\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3\cdots$ ثوابت لا تعتمد على قيمة λ وتعتمد على قيمة المشتقات الجزئية للدالة g

6- الأمثلة والنتائج

المثال الأول: $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \ln(x+y+z)\,dxdydz$

وقيمته التحليلية 0.33783324343، حيث الدالة مستمرة في جميع نقاط منطقة التكامل باستثناء النقطة $(x,y,z)=(0,0,0)$ التي عندها الدالة معتلة اعتلال لوغارتمي وبذلك تكون حدود التصحيح المرافقة هي

$$\zeta_{MMS}(\lambda)=\upsilon_1\lambda^2+a\lambda^3+\upsilon_2\lambda^4+\upsilon_3\lambda^6+\cdots$$

حيث $\upsilon_1,a,\upsilon_2,\upsilon_3,\cdots$ ثوابت

المثال الثاني $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sqrt{x+y+z}\,dxdydz$

وقيمته التحليلية 1.20565686152 ، حيث الدالة مستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل لكنها معتلة المشتقة في النقطة $(x,y,z)=(0,0,0)$ اعتلال نسبي ومنها تكون حدود التصحيح المرافقة هي

$$\zeta_{MMS}(\lambda)=\upsilon_1\lambda^2+a\lambda^{3.5}+\upsilon_2\lambda^4+\upsilon_3\lambda^6+\cdots$$

حيث $\upsilon_1,a,\upsilon_2,\upsilon_3,\cdots$ ثوابت

المثال الثالث $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdydz}{\sqrt{x+y+z}}$

وقيمته التحليلية 0.862877077143، الدالة مستمرة خلال منطقة التكامل لكنها معتلة عند النهاية السفلى للتكامل اعتلال نسبي ومنها تكون حدود التصحيح المرافقة هي

$$\zeta_{MMS}(\lambda)=\upsilon_1\lambda^2+a\lambda^{2.5}+\upsilon_2\lambda^4+\upsilon_3\lambda^6+\cdots$$

حيث $\upsilon_1,a,\upsilon_2,\upsilon_3,\cdots$ ثوابت

المثال الرابع $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{xy^2dxdydz}{\sqrt{1-xyz}}$

وقيمته التحليلية 0.2، المكامل هنا مستمر في كل نقاط منطقة التكامل لكنه معتل في الحد الأعلى للتكامل عند النقطة $(x,y,z)=(1,1,1)$ اعتلالا نسبيا وبذلك تكون حدود التصحيح المرافقة هي

$$\zeta_{MMS}(\lambda)=\upsilon_1\lambda^2+a_1\lambda^{2.5}+a_2\lambda^{3.5}+\upsilon_2\lambda^4+a_3\lambda^{4.5}+a_4\lambda^{5.5}+\upsilon_3\lambda^6+\cdots$$

حيث $\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3,\cdots a_1,a_2,a_3,\cdots$ ثوابت

المثال الخامس $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 xy^2\sqrt{1-xyz}\,dxdydz$

وقيمته التحليلية 0.142857142857 ، الدالة هنا معتلة المشتقة فقط في النقطة $(x,y,z)=(1,1,1)$ ضمن منطقة التكامل ونوع الاعتلال نسبي أما حدود التصحيح المرافقة هي

$$\zeta_{MMS}(\lambda)=\upsilon_1\lambda^2+a_1\lambda^{3.5}+\upsilon_2\lambda^4+a_2\lambda^{4.5}+a_3\lambda^{5.5}+\upsilon_3\lambda^6+\cdots$$

حيث $\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3,\cdots a_1,a_2,a_3,\cdots$ ثوابت

المثال السادس $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}\,dxdydz$ وهو غير معروف القيمة التحليلية ، التكامل مكامله معتل المشتقة في الحد الأدنى للتكامل عند النقطة $(x,y,z)=(0,0,0)$ اعتلالا نسبيا وبذلك تكون حدود التصحيح المرافقة هي

$$\zeta_{MMS}(\lambda)=\upsilon_1\lambda^2+\upsilon_2\lambda^4+\upsilon_3\lambda^6+\cdots$$

حيث $\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3,\cdots$ ثوابت

من جداول التكاملات السابقة ومن الجدول (7) الذي يوضح عدد الفترات الجزئية وعدد المراتب الصحيحة المحصل عليها لكل تكامل من التكاملات السابقة نلاحظ في حالة التكامل الأول والتكامل الثاني والتكامل الرابع عند استخدام القاعدة MMS كانت النتيجة صحيحة لخمس مراتب عشرية فقط

بينما بعد استخدام حدود التصحيح المرافقة من خلال تعجيل رومبرك صارت النتيجة صحيحة لإحدى عشرة مرتبة عشرية في العدد نفسه من الفترات الجزئية حيث كانت (256 ، 128، 256) فترة جزئية على التوالي للتكاملات الأول والثاني والرابع ، أما في التكامل الثالث عند استخدام القاعدة *MMS* دون حدود التصحيح حصلنا على أربع مراتب عشرية صحيحة عندما كان عدد الفترات الجزئية 128 فترة جزئية في حين عند الاستفادة من تعجيل رومبرك وحدود التصحيح كانت المراتب صحيحة لاثنتي عشرة مرتبة عشرية عند العدد نفسه من الفترات الجزئية ، وبالنسبة للتكامل الخامس عند استخدام القاعدة *MMS* أعطت نتيجة صحيحة لست مراتب عشرية فقط وبعد استعمال حدود التصحيح المرافقة من خلال تعجيل رومبرك حصلنا على اثنتي عشرة مرتبة عشرية صحيحة وذلك عندما كانت الفترات الجزئية هي 256 فترة جزئية ، ونلاحظ من الجدول (6) الخاص بنتائج التكامل السادس غير معروف القيمة التحليلية عند استخدام القاعدة *MMS* و تعجيل رومبرك وحدود التصحيح المرافقة لها ثبوت القيمة أفقيا لأربعة أعمدة عندما كان عدد الفترات الجزئية 128 فترة جزئية و نستنتج من ذلك بأنه قيمة التكامل هي (2.21532065296078) مقربة لأربع عشرة مرتبة عشرية صحيحة .

7- المناقشة والاستنتاج

نستنتج من خلال نتائج جداول هذا البحث انه عند حساب قيم التكاملات الثلاثية باستخدام القاعدة *MMS* إن هذه القاعدة تعطي قيماً صحيحة لعدة مراتب عشرية مقارنة مع القيم الدقيقة للتكاملات وكانت تتراوح بين (4-6) بما يخص التكاملات في اعلاه باستعمال عدد من الفترات الجزئية بدون استعمال طريقة تعجيلية معها إلا إن الجداول أوضحت انه من خلال استخدام تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة والاستفادة من حدود التصحيح المرافقة أعطت نتائج أفضل من حيث سرعة الاقتراب الى القيم التحليلية بعدد قليل من الفترات الجزئية نسبياً و كانت القيم صحيحة لعدة مراتب عشرية تتراوح بين احدى عشرة مرتبة صحيحة و أربع عشرة مرتبة عشرية صحيحة . وقد أوضحت الجداول إن طريقة تعجيل رومبرك مع عدم اهمال الاعتلال ذات أهمية كبيرة في تعجيل اقتراب القيم إلى القيم الحقيقية للتكاملات وبذلك يمكن الاعتماد على الطريقة *MMS* في حساب التكاملات الثلاثية مهما كان سلوك المكامل في منطقة التكامل من حيث الاستمرارية أو الاعتلال .

W	قاعدة MMS	القيم الناتجة من استخدام تعجيل رومبرك						
		حد التصحيح الأول	حد التصحيح الثاني	حد التصحيح الثالث	حد التصحيح الرابع	حد التصحيح الخامس	حد التصحيح السادس	حد التصحيح السابع
2	0.35152823816							
4	0.34173170566	0.33846619483						
8	0.33887824542	0.33792709201	0.33785007732					
16	0.33810406926	0.33784601054	0.33783442747	0.33783338415				
32	0.33790219715	0.33783490644	0.33783332014	0.33783324632	0.33783324413			
64	0.33785064095	0.33783345555	0.33783324827	0.33783324348	0.33783324344	0.33783324343		
128	0.33783761290	0.33783327021	0.33783324374	0.33783324343	0.33783324343	0.33783324343	0.33783324343	
256	0.33783433832	0.33783324680	0.33783324345	0.33783324343	0.33783324343	0.33783324343	0.33783324343	0.33783324343

جدول (1) يبين قيمة التكامل $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \ln(x+y+z)\,dxdydz$ باستخدام قاعدة MMS مع تعجيل رومبرك

W	قاعدة MMS	القيم الناتجة من استخدام تعجيل رومبرك					
		حد التصحيح الأول	حد التصحيح الثاني	حد التصحيح الثالث	حد التصحيح الرابع	حد التصحيح الخامس	حد التصحيح السادس
2	1.20920732081						
4	1.20660929732	1.20574328948					
8	1.20590259531	1.20566702797	1.20565963378				
16	1.20571909841	1.20565793278	1.20565705092	1.20565687873			
32	1.20567250006	1.20565696728	1.20565687367	1.20565686185	1.20565686159		
64	1.20566077869	1.20565687156	1.20565686228	1.20565686152	1.20565686152	1.20565686152	
128	1.20565784151	1.20565686245	1.20565686157	1.20565686152	1.20565686152	1.20565686152	1.20565686152

جدول (2) يبين قيمة التكامل $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sqrt{x+y+z}\,dxdydz$ باستخدام قاعدة MMS مع تعجيل رومبرك

W	قاعدة MMS	القيم الناتجة من استخدام تعجيل رومبرك					
		حد التصحيح الأول	حد التصحيح الثاني	حد التصحيح الثالث	حد التصحيح الرابع	حد التصحيح الخامس	حد التصحيح السادس
2	0.852261482950						
4	0.859569579384	0.862005611528					
8	0.861923486931	0.862708122780	0.862858978103				
16	0.862615466262	0.862846126039	0.862875760477	0.862876879302			
32	0.862807517566	0.862871534667	0.862876990846	0.862877072870	0.862877075943		
64	0.862858949040	0.862876092864	0.862877071679	0.862877077068	0.862877077135	0.862877077139	
128	0.862872414408	0.862876902864	0.862877076801	0.862877077142	0.862877077143	0.862877077143	0.862877077143

جدول (3) يبين قيمة التكامل $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdydz}{\sqrt{x+y+z}}$ باستخدام قاعدة MMS مع تعجيل رومبرك

W	قاعدة MMS	القيم الناتجة من استخدام تعجيل رومبرك						
		حد التصحيح الأول	حد التصحيح الثاني	حد التصحيح الثالث	حد التصحيح الرابع	حد التصحيح الخامس	حد التصحيح السادس	حد التصحيح السابع
2	0.18230779554							
4	0.19510442511	0.19936996830						
8	0.19867580326	0.19986626264	0.19997283551					
16	0.19964901288	0.19997341608	0.19999642592	0.19999871320				
32	0.19990846188	0.19999494488	0.19999956791	0.19999987256	0.19999994985			
64	0.19997641527	0.19999906640	0.19999995145	0.19999998863	0.19999999637	0.19999999852		
128	0.19999397687	0.19999983074	0.19999999487	0.19999999908	0.19999999978	0.19999999994	0.19999999997	
256	0.19999847146	0.19999996965	0.19999999948	0.19999999993	0.19999999999	0.20000000000	0.20000000000	0.20000000000

جدول (4) يبين قيمة التكامل $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{xy^2 dxdydz}{\sqrt{1-xyz}}$ باستخدام قاعدة MMS مع تعجيل رومبرك

W	قاعدة MMS	القيم الناتجة من استخدام تعجيل رومبرك						
		حد التصحيح الأول	حد التصحيح الثاني	حد التصحيح الثالث	حد التصحيح الرابع	حد التصحيح الخامس	حد التصحيح السادس	حد التصحيح السابع
2	0.135945941850							
4	0.141172595954	0.142914813989						
8	0.142441434261	0.142864380363	0.142859490403					
16	0.142753829303	0.142857960984	0.142857338572	0.142857195116				
32	0.142831379059	0.142857228978	0.142857158004	0.142857145966	0.142857143694			
64	0.142850708377	0.142857151483	0.142857143969	0.142857143033	0.142857142897	0.142857142879		
128	0.142855534862	0.142857143691	0.142857142935	0.142857142866	0.142857142859	0.142857142858	0.142857142857	
256	0.142856740917	0.142857142936	0.142857142863	0.142857142858	0.142857142857	0.142857142857	0.142857142857	0.142857142857

جدول (5) يبين قيمة التكامل $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 xy^2\sqrt{1-xyz}\,dxdydz$ باستخدام قاعدة MMS مع تعجيل رومبرك

W	قاعدة MMS	القيم الناتجة من استخدام تعجيل رومبرك					
		حد التصحيح الأول	حد التصحيح الثاني	حد التصحيح الثالث	حد التصحيح الرابع	حد التصحيح الخامس	حد التصحيح السادس
2	2.20682253828646						
4	2.21323322163158	2.21537011607996					
8	2.21480112153548	2.21532375483677	2.21532066408723				
16	2.21519091463748	2.21532084567148	2.21532065172713	2.21532065153094			
32	2.21528822739805	2.21532066498490	2.21532065293913	2.21532065295837	2.21532065296397		
64	2.21531254713347	2.21532065371195	2.21532065296042	2.21532065296076	2.21532065296077	2.21532065296076	
128	2.21531862653916	2.21532065300772	2.21532065296077	2.21532065296078	2.21532065296078	2.21532065296078	2.21532065296078

جدول (6) يبين قيمة التكامل $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}\,dxdydz$ باستخدام قاعدة MMS مع تعجيل رومبرك

ت	الـدالـة	دقة القاعدة دون الاستفادة من حدود التصحيح	دقة القاعدة مع الاستفادة من حدود التصحيح	نـوع الاعتـلال
1	$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \ln(x+y+z)\,dxdydz$	$\frac{5}{256}$	$\frac{11}{256}$	المكامل معتل في الحد الأدنى للتكامل اعتلالا لوغارتميا
2	$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sqrt{x+y+z}\,dxdydz$	$\frac{5}{128}$	$\frac{11}{128}$	المكامل معتل المشتقة في الحد الأدنى للتكامل اعتلالا نسبيا
3	$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdydz}{\sqrt{x+y+z}}$	$\frac{4}{128}$	$\frac{12}{128}$	المكامل معتل في الحد الأدنى للتكامل اعتلالا نسبيا
4	$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{xy^2dxdydz}{\sqrt{1-xyz}}$	$\frac{5}{256}$	$\frac{11}{256}$	المكامل معتل في الحد الأعلى للتكامل اعتلالا نسبيا
5	$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 xy^2\sqrt{1-xyz}\,dxdydz$	$\frac{6}{256}$	$\frac{12}{256}$	المكامل معتل المشتقة في الحد الأعلى للتكامل اعتلالا نسبيا
6	$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}\,dxdydz$	$\frac{5}{128}$	$\frac{14}{128}$	المكامل معتل المشتقة في الحد الأدنى للتكامل اعتلالا نسبيا وغير معروف القيمة التحليلية

جدول (7) يبين عدد المراتب الصحيحة وعدد الفترات الجزئية لكل دالة

المصادر

[1] Fox L. And Linda Hayes , " On the Definite Integration of Singular ---- Integrands " SIAM REVIEW. ,12 , pp. 449-457 , 1970 .

[2] Fox L.," Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp. 87-93 , 1967 .

[3] Anthony Ralston ,"A First Course in Numerical Analysis " McGraw –Hill Book Company ,1965

[4] FausAtt L.V.," Applied Numerical Analysis Using Matalb ",second edition, Person Prentice-Hall, 2008

[5] Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " comput J.15 , pp. 360 , 361 , 1972 .

[6] ريتشارد بوردين و دوكلاسفاريز ، " التحليل العددي " ، الجزء الاول ، ترجمة الاستاذ المساعد خالد احمد السامرائي وسعد ابراهيم مهدي ، جامعة بغداد كلية التربية للبنات ، 1992 .

[7] ضياء ، عذراء محمد ، " طرائق عددية لايجاد التكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2009.

[8] عكار، بتول حاتم ، " بعض الطرائق العددية لحساب التكاملات الثنائية والثلاثية "رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة، 2010 .

[9] محمد، علي حسن، صفاء مهدي موسى ، وفاء محمد ، " اشتقاق طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وصيغة الخطا لها " ، بحث منشور في مجلة جامعة كربلاء ، (2013) .

[10] هلال ، رنا حسن ، " اشتقاق طرائق عددية مركبة من قاعدتي النقطة الوسطى وشبه المنحرف وصيغ اخطائها لحساب التكاملات الثلاثية المحددة عدديا وتحسين النتائج باستخدام طرائق تعجيلية " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2013

[11] كاظم ، رحاب رحيم ، " اشتقاق قواعد عددية مركبة من قاعدتي شبه المنحرف و سمبسون وصيغ اخطائها لحساب التكاملات الثلاثية المحددة عدديا وتحسين النتائج باستخدام طرائق تعجيلية " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2013

[12] شبر ، " اشتقاق طرائق عددية مركبة من صيغ نيوتن – كوتس لحساب التكاملات الثلاثية المحددة وتحسين النتائج باستخدام طرائق تعجيلية " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، (2014)

[13] موسى ، صفاء مهدي ، "حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عددياً باستخدام الطريقتين AI(MMS) و RO(MMS) والمقارنة بينهما " ، بحث منشور في مجلة جامعة القادسية ، (2014) .

[14] سيفي ، علي محمد صادق ، " مبادئ التحليل العددي " ، جامعة بغداد كلية العلوم ، 1985

مجلة القادسية لعلوم الحاسوب والرياضيات المجلد(٨) العدد(٢)
السنة(٢٠١٦)

FindingCorrection Terms Accompaniment of Rule MMS of Triple Integrals Partial Derivative Singular or Singular Numerically

Safaa Mahdi Muosa
Department of Mathematics
College of Education for Girls
University of Kufa

Nada Ahmed Mohammed Taha
Department of Mathematics
College of Education for Girls
University of Kufa

Hayder Abbas Dahham
College of dentestry
University of Kufa

Abstract

The main aim of this paper is to find a new numerical method for evaluating values of integrals triple whose singular or the integrands their selves are singular Atone of two ends of the region of integration and by use the Simpson‘s rule on the interior dimension X and Mid- point rule on both two dimensions of exterior Z and middle dimension Y with acceleration Romberg where the number of divisions on the exterior dimension are equal to the number of divisions on the middle dimension and equal to the number of divisions on the interior dimension where we got high accuracy in the results by few subintervals relatively and short time .