مجلة القادسية لعلوم الحاسوب والرياضيات المجلد(٨) العدد(٢)
السنة(٢٠١٦)

صفحة ١٦-٢٨ رنا حسن

اشتقاق قاعدة لحساب التكاملات الثلاثية المعتلة في كلتا نهايتي التكامل باستخدام قاعدة شبه المنحرف وقاعدة النقطةالوسطى

رنا حسن هلال عبد الله

جامعة الكوفة /كلية التربية للبنات/قسم الرياضيات

استلام البحث: ٢٠١٦/١/٢٤ إرسال التعديلات: ٢٠١٦/١٠/ ١٦ قبول النشر: ٢٠١٦/١٠/٢٣

المستخلص :

الهدف الرئيس من هذا البحث هو إيجاد قيم التكاملات الثلاثيه البعد عددياً مكاملاتها معتلة المشتقات الجزئية أو معتلة في كلتا حدي منطقة التكامل ، وإيجاد صيغة عامة لصيغ الخطأ حسب سلوك المكامل وبأسلوب جديد مغاير للأسلوب الذي اتخذوه باحثون آخرون محمد[4]، الطائي[5]، ضياء [6]وغيرهم .

ان الطريقة $RMTM$ (هي طريقة مركبة من استخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعدين الداخلي x والخارجي z وقاعدة شبه المنحرف على البعد الاوسط y, مع تطبيق طريقة تعجيل رومبرك عليها عندما عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعدين الاوسط و الخارجي بمعنى ان $(h = \bar{h} = \bar{\bar{h}})$ حيث

إن $\bar{h}$ المسافات بين الإحداثيات السينية و h المسافات بين الإحداثيات الصادية$\bar{\bar{h}}$ المسافات بين الاحداثيات على المحور (z) يمكن الاعتماد عليها في حساب التكاملات الثلاثية حيث أعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً وبوقت اقل مما احتاجه الباحثون اعلاه الذين تعاملوا مع الموضوع نفسه

Mathematics Subject Classifications: 65XX

١-المقدمة

يتميز موضوع التحليل العددي في ابتكار طرائق متنوعة لإيجاد حلول تقريبية لمسائل رياضية معينة بأسلوب فعال . تعتمد كفاءة هذه الطرائق على كل من الدقة والسهولة التي يمكن بها أن تنفذ. فالتحليل العددي الحديث هو الواجهة العديدة للمجال الواسع للتحليل التطبيقي . وبما أن للتكاملات الثلاثية أهمية في إيجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم و إيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة على سبيل المثال الحجم الواقع داخل $x^2 + y^2 = 4x$ وفوق $z = 0$ وتحت $x^2 + y^2 = 4z$ وحساب المركز المتوسط للحجم الوقع داخل $x^2 + y^2 = 9$ وفوق المستوي $z = 0$ وتحت المستوي $x + z = 4$ ، وكذلك إيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيع أو صفيحة رقيقة من المعدن.فرانك آيرز [3] لذلك عمل عدد من الباحثين في مجال التكاملات الثلاثية .

في عام 2010 قدمت عكار [7] طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية المعتلة في احد طرفي التكامل وذلك باستعمال طريقة $RMMM$ الناتجة من تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى المطبقة على الأبعاد x و y و z عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة

البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وحصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وبفترات جزئية قليلة نسبياً.

وفي عام ٢٠١٣ قدمت هلال [8] طرائق عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية المستمرة والمعتلة في احد حدي التكامل وذلك باستعمال الطرائق

$$RMTT, RTTM, RTTT$$
$$RMMT, RTMM, RTMT, RMTM,$$ الناتجة

من تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى و قاعدة شبه المنحرف على الابعاد z,y,x عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وكانت الطرائق متكافئة وجيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وبفترات جزئية قليلة بالنسبة للتكاملات المستمرة .

وفي عام ٢٠١٤ قدم عباس [9] طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثيةالمعتلة في غير احدى نهايتي التكامل وذلك باستعمال طريقة RSSS الناتجة من تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون المطبقة على الابعاد xوyوz عندما تكون عدد الفترات الجزئية المجزئه على الابعاد الثلاثة متساويه وحصل على نتائج جيدة من حيث الدقة وبسرعه جيده ووقت قصير لا يتجاوز البضعة ثواني وربما اجزاء من الثانيه في بعض الاحيان

وفي عام ٢٠١٤ قدم سلمان [10] طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثيةالمعتلة في غير احدى نهايتي التكامل وذلك باستعمال طريقة RMMMالناتجه من تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى المطبقة على الابعاد xوyوz عندما تكون عدد الفترات الجزئية المجزئه على الابعاد الثلاثة متساويه وحصل على نتائج جيدة من حيث الدقة وبسرعه جيده ووقت قصير جدا .

أما في هذا البحث اقدم مبرهنة مع البرهان لاشتقاق قاعدة جديدة لحساب قيم تقريبية للتكاملات الثلاثية التي مكاملاتها معتلة المشتقات الجزئية في كلا حدي التكامل مع صيغة الخطأ لها وهذه القاعدة ناتجة عن تطبيق طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من استعمال قاعدتي النقطة الوسطى على البعدين الداخليx والخارجي z وقاعدة شبه المنحرف على البعد الأوسط y عندما $m = n = n_1$) n عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي $[x_0, x_n]$ و n_1 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط $[y_0, y_{n1}]$ و m عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي $[z_0, z_m]$ وسنرمز لهذه الطريقة بالرمز $RMTM$ حيث R طريقة تعجيل رومبرك و MTM القاعدة المشتقة وقد حصلنا على نتائج جيدة من حيث الدقة سرعة الاقتراب وبعدد فترات جزئية قليل نسبياً وبوقت قصير جدا.

2. حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المعتلةوالمعتلة المشتقات الجزئيه في كلتا حدي عددياً

مبرهنة

لتكن الدالة $f\,(x\,,y\,)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[x_0, x_n]\times[y_0, y_n]\times[z_0, z_n]$ عدا عند النقاط $(x_0, y_0, z_0), (x_n, y_n, z_n)$ فان القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي $I = \int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz$ يمكن حسابها حسب

القاعدة الآتية:

$$MTM = \int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \frac{h^3}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}[f(x_i+.5h, y_0, z_k+.5h)+$$

$$f(x_j+.5h, y_n, z_k+.5h)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_j+.5h, y_i, z_k+.5h)]$$

$$+h^5\{[\frac{1}{24}D_x^{\ 2}-\frac{1}{12}D_y^{\ 2}+\frac{1}{24}D_z^{\ 2}]$$
$$+h^6[(\frac{-1}{48}D_x^{\ 3}+\frac{1}{24}D_y^{\ 3}-\frac{1}{48}D_z^{\ 3})+$$
$$\frac{1}{24}(D_y^{\ 2}D_z+D_y^{\ 2}D_x)-$$
$$\frac{1}{48}(D_x^{\ 2}D_z+D_z^{\ 2}D_x+D_z^{\ 2}D_y+D_x^{\ 2}D_y)]$$
$$+h^7[\cdots]\} f(x_1,y_1,z_1)+$$
$$\{-h^5[\frac{1}{24}D_x^{\ 2}-\frac{1}{12}D_y^{\ 2}+\frac{1}{24}D_z^{\ 2}]+$$
$$h^6[(\frac{1}{48}D_x^{\ 3}-\frac{1}{24}D_y^{\ 3}+\frac{1}{48}D_z^{\ 3})+$$
$$\frac{1}{48}(D_x^{\ 2}D_z+D_z^{\ 2}D_x)-\frac{1}{24}(D_y^{\ 2}D_x+D_y^{\ 2}D_z$$
$$+D_x^{\ 2}D_y+D_z^{\ 2}D_y)]$$
$$+h^7[\cdots]+\cdots\} f(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})$$

وان صيغة الخطأ هي

$$E_{MTM}(h) = I - MTM(h) = A_{MTM}h^2 + B_{MTM}h^4$$
$$+C_{MTM}h^6+\cdots$$

حيث $A_{MTM}, B_{MTM}, C_{MTM},\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة f

البرهان:-

لنفرض انه لدينا التكامل

$$I = \int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz$$

ولنفرض ان الدالة f(x,y,z) مستمرة في منطقة التكامل $[x_0,x_n]\times[y_0\times y_n]\times[z_0\times z_n]$ ماعدا عند النقاط (x_n,y_n,z_n) و (x_0,y_0,z_0) يمكن كتابتة التكامل اعلاه بالشكل الاتي

$$I = \int_{z_1}^{z_k}\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz = MTM(h)+E(h)...(2)$$

حيث إن $MTM(h)$ تمثل قيمة التكامل عددياً باستخدام الصيغة MTM وان $E(h)$ هي سلسلة حدود التصحيح correction terms الممكن إضافتها إلى قيم $MTM(h)$، وان

$$h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{(d-c)}{n_1} = \frac{(g-e)}{m}$$

وان صيغة الخطأ للتكاملات الأحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة شبه المنحرف هي

$$E_T(h) = -\frac{1}{12}h^2(f_n^{(1)}-f_0^{(1)})+$$
$$\frac{1}{720}h^4(f_n^{(3)}-f_0^{(3)})-\cdots \qquad \cdots(3)$$

وان صيغة الخطأ للتكاملات الاحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة النقطة الوسطى هي

$$E_M(h) = \frac{1}{6}h^2(f_{n_1}^{(1)}-f_0^{(1)})-$$
$$\frac{6}{360}h^4(f_{n_1}^{(3)}-f_0^{(3)})-\cdots \qquad \cdots(4)$$

فوكس[1]وفوكس [٢]

يمكن كتابة التكامل $I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz$

بالشكل التالي وذلك لغرض عزل الاعتلال في الحدين:

$$I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=$$

$$\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz+$$

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz+$$

$$\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz+\int_{z_0}^{z_{n-1}}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz+$$

$$\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_1}^{x_{n-1}} f(x,y,z)dxdydz+$$

$$\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz+$$

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)dxdydz+\int_{z_1}^{z_{n-1}}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz$$

بالنسبة للتكاملات الست ماعدا الاول والاخير الاخر فأن المكامل مستمر المشتقات في فترة تكاملهاويمكن حساب قيم التكاملات حسب المبرهنة التالية:

لتكن الدالة $f\left(x,y,z\right)$ مستمرة و جميع مشتقاتها موجودة في كل نقطة من نقاط المنطقة $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\times\left[e,g\right]$ فان القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي $I=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz$ يمكن حسابها من القاعدة الآتية:

$$MTM=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dxdydz=$$

$$\frac{h^3}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_i+\frac{h}{2},c,z_k+\tfrac{h}{2})+$$

$$f(x_i+\frac{h}{2},d,z_k+\tfrac{h}{2})+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i+\frac{h}{2},y_j,z_k+\tfrac{h}{2})+\cdots$$

هلال [٨]

ويكون حساب التكاملات كالاتي:

$$1)\int_{z_1}^{z_n}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{y_i}^{y_{i+1}}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dxdydz=$$

$$\frac{h^3}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_0+\frac{h}{2},y_i,z_k+\frac{h}{2})+$$

$$f(x_0+\frac{h}{2},y_{i+1},z_k+\frac{h}{2})+A_1h^2+B_1h^4+\cdots(5)$$

$$2)\sum_{k=0}^{n-2}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\sum_{i=0}^{n-2}\int_{y_i}^{y_{i+1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{i=0}^{n-2}[f(x_{n-1}+\frac{h}{2},y_i,z_k+\frac{h}{2})+$$

$$f(x_{n-1}+\frac{h}{2},y_{i+1},z_k+\frac{h}{2})]+$$

$$A_2h^2+B_2h^4+\cdots \qquad (6)$$

$$3)\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_1}^{x_{n-1}} f(x,y,z)dxdydz=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{y_i}^{y_{i+1}}\sum_{j=1}^{n-2}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}$$

$$\sum_{j=1}^{n-2}[f(x_j+.5h,y_i,z_k+.5h)+$$

$$f(x_j+.5h,y_{i+1},z_k+.5h)]+$$

$$A_2h^2+B_2h^4+\cdots \qquad (7)$$

$$4)\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\int_{z_0}^{z_1}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{y_i}^{y_{i+1}}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x,y,z)dxdydz = \frac{h^3}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}$$

$$[f(x_j+\frac{h}{2},y_i,z_0+\frac{h}{2})+f(x_j+\frac{h}{2},y_{i+1},z_0+\frac{h}{2})]+$$

$$A_4h^2+B_4h^4+\cdots \qquad (8)$$

$$5)\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n}\sum_{i=0}^{n-2}\int_{y_i}^{y_{i+1}}\sum_{j=0}^{n-2}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x,y,z)dxdydz = \frac{h^3}{2}\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n-2}$$

$$[f(x_j+\frac{h}{2},y_i,z_{n-1}+\frac{h}{2})+f(x_j+\frac{h}{2},y_{i+1},z_{n-1}+\frac{h}{2})]$$

$$+A_4h^2+B_4h^4+\cdots \qquad (9)$$

$$6)\int_{z_1}^{z_{n-1}}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\sum_{k=1}^{n-2}\int_{z_1}^{z_{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{y_i}^{y_{i+1}}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x,y,z)dxdydz = \frac{h^3}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}[f(x_j+\frac{h}{2},y_i,z_1+\frac{h}{2})+$$

$$f(x_j+\frac{h}{2},y_{i+1},z_1+\frac{h}{2})]$$

$$+A_4h^2+B_4h^4+\cdots \qquad (10)$$

حيث ان $h=\frac{x_n-x_0}{n}$ وان

$j=1,2,\cdots n-1 \quad x_j=a+jh$

$i=1,2,\cdots n-1 \quad y_i=c+ih$

وان $k=1,2,3,\cdots,n+1$

حيث $A_i, B_i, C_i, \cdots$ وان $i=1,2,3$ ثوابت تعتمد على قيم المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرين x,y ولاتعتمد على hاما التكاملين الاول و الاخير يتم حسابها حسب المبرهنة التالية

لتكن الدالة $f(x,y,z)$ مستمرة و قابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[x_0,x_n]\times[y_0,y_n]\times[z_0,z_n]$ عدا احدى مشتقاتهاعلى الاقل غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $(x,y,z)=(x_n,y_n,z_n)$ فان القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي $I=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz$ يمكن حسابها من القاعدة الآتية:

$$MTM=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz = \frac{h^3}{2}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{i=0}^{n-2}$$

$$[f(x_i+.5h,y_0,z_k+.5h)+$$

$$f(x_i+.5h,y_n,z_k+.5h)$$

$$+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i+.5h,y_j,z_k+.5h)]\cdots$$

هلال[٨]

هذاعندما يكون الاعتلال في الحد الاعلى ويكون حسابه كالاتي-

$$1)\int_{z_{n-1}}^{z_n}\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y,z)dxdydz = \frac{h^3}{2}[f(x_{n-1}+\frac{h}{2},y_{n-1},$$

$$z_{n-1}+\frac{h}{2})+f(x_{n-1}+\frac{h}{2},y_n,z_{n-1}+\frac{h}{2})]$$

$$-\{h^5[\frac{1}{24}D_x{}^2-\frac{1}{12}D_y{}^2+\frac{1}{24}D_z{}^2]+$$

$$h^6[(\frac{-1}{48}D_x^{\,3}+\frac{1}{24}D_y^{\,3}-\frac{1}{48}D_z^{\,3})+$$
$$\frac{1}{24}(D_y^{\,2}D_z+D_y^{\,2}D_x)-$$
$$\frac{1}{48}(D_x^{\,2}D_z+D_z^{\,2}D_x+D_z^{\,2}D_y+D_x^{\,2}D_y)]+$$
$$h^7[\cdots]]+\cdots\}f(x_1,y_1,z_1)+$$
$$+A_{MTM}h^2+B_{MTM}h^4\cdots(11)$$

وعندما يكون الاعتلال في الحد الاسفل ايضا حسب مبرهنة اشتقته هلال [٨]يكون كالاتي:

$$2)\int_{z_0}^{z_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{2}[f(x_0+\frac{h}{2},y_0,z_0+\frac{h}{2})$$
$$+f(x_0+\frac{h}{2},y_1,z_0+\frac{h}{2})]$$
$$+\{h^5[\frac{1}{24}D_x^{\,2}-\frac{1}{12}D_y^{\,2}+\frac{1}{24}D_z^{\,2}]+$$
$$h^6[(\frac{-1}{48}D_x^{\,3}+\frac{1}{24}D_y^{\,3}-\frac{1}{48}D_z^{\,3})+$$
$$\frac{1}{24}(D_y^{\,2}D_z+D_y^{\,2}D_x)-$$
$$\frac{1}{48}(D_x^{\,2}D_z+D_z^{\,2}D_x+D_z^{\,2}D_y+$$
$$D_x^{\,2}D_y)]+h^7[\cdots]]+\cdots\}f(x_1,y_1,z_1)+$$
$$A_{MTM}h^2+B_{MTM}h^4\cdots f(x_1,y_1) \qquad (12)$$

وبجمع المعادلات من (5),(6) ... الى(12)نحصل على

$$MTM=\int_{z_0}^{z_n}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n}f(x,y,z)dxdydz$$
$$=\frac{h^3}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}[f(x_i+.5h,y_0,z_k+.5h)+$$
$$f(x_j+.5h,y_n,z_k+.5h)+$$
$$2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_j+.5h,y_i,z_k+.5h)]$$
$$+h^5\{[\frac{1}{24}D_x^{\,2}-\frac{1}{12}D_y^{\,2}+\frac{1}{24}D_z^{\,2}]$$

$$+h^6[(\frac{-1}{48}D_x^{\,3}+\frac{1}{24}D_y^{\,3}-\frac{1}{48}D_z^{\,3})+$$
$$\frac{1}{24}(D_y^{\,2}D_z+D_y^{\,2}D_x)-$$
$$\frac{1}{48}(D_x^{\,2}D_z+D_z^{\,2}D_x+D_z^{\,2}D_y+D_x^{\,2}D_y)]$$
$$+h^7[\cdots]]\}f(x_1,y_1,z_1)$$

$$+\{-h^5[\frac{1}{24}D_x^{\,2}-\frac{1}{12}D_y^{\,2}+\frac{1}{24}D_z^{\,2}]+$$
$$h^6[(\frac{1}{48}D_x^{\,3}-\frac{1}{24}D_y^{\,3}+\frac{1}{48}D_z^{\,3})+\frac{1}{48}(D_x^{\,2}D_z+$$
$$D_z^{\,2}D_x)-\frac{1}{24}(D_y^{\,2}D_x+D_y^{\,2}D_z+D_x^{\,2}D_y+$$
$$D_z^{\,2}D_y)]+h^7[\cdots]+\cdots\}f(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})+$$
$$A_{MTM}h^2+B_{MTM}h^4+C_{MTM}\cdots$$

حيث $A_{MTM},B_{MTM},C_{MTM},\cdots$ هي ثوابت تعتمد على قيمة المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرين Z, y, x ولاتعتمد على h. حيث ان الصيغة اعلاه تتضمن استخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعدين الداخلي والخارجي و قاعدة شبه المنحرف على البعد الاوسط Y متضمنة لحدود التصحيح مضافا اليها الخطأ بسبب الاعتلال في المشتقة في النقطتين (x_n,y_n,z_n) ، (x_0,y_0,z_0) وحول النقطتين $(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})$ و (x_1,y_1,z_1) .

٣. الأمثلة

١- $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sqrt{(x+y+z)/3-xyz}\,dxdydz$ غير معروف القيمة التحليلية

٢-

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (1/\sqrt{1-xyz}+1/\sqrt{x+y+z})dxdydz$$

غير معروف القيمة التحليلية

٣-

$$\int_{-1}^0\int_0^1\int_{-1}^0 (x.y.z(x^2+y^2-z\wedge 2-z)^{1/2})dxdydz$$

الذي قيمته التحليليه 0.132598984165.

١- $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sqrt{(x+y+z)/3-xyz}\,dxdydz$ المكامل هنا مستمراً في منطقة التكامل ، لكن معتل المشتقات الجزئيه عند النقاط (1,1,1),(0,0,0) ونوع الاعتلال جذري لذا فان حدود التصحيح طبقا للمبرهنه اعلاه تكون كالاتي

$$E_{MTM}(h)=A_{MTM}h^2+b_1h^{2.5}+$$
$$b_2h^{3.5}+B_{MTM}h^4+\cdots$$

حيث

$i=1,2,3,\cdots \quad b_i, \quad A_{MTM}, B_{MTM},\cdots$ ثوابت

وباستعمال الطريقة RMTM حصلت على النتائج المدونه في الجدول (١)

بالرغم من ان التكامل غير معروف القيمة التحليلية الا اننا نرى من خلال الجدول الخاص بالقاعدة RMTM ان القيمة نفسها ثابتة افقيا (لخمسة اعمدة عندما n=256) لذا يمكن القول بان القيمة صحيحة على الاقل لاثنتا عشرة مرتبة عشرية (0.607511819343).

٢-

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (1/\sqrt{1-xyz}+1/\sqrt{x+y+z})dxdydz$$

المكامل هنا مستمراً في منطقة التكامل ، لكن معتل المشتقات الجزئيه عند النقاط (1,1,1),(0,0,0) ونوع الاعتلال جذري ونسبي لذا فان حدود التصحيح طبقا للمبرهنه اعلاه تكون

$$E_{MTM}(h)=a_1h^{1.5}+A_{MTM}h^2+b_1h^{2.5}+b_2h^{3.5}$$
$$+B_{MTM}h^4+b_ih^{4.5}+\cdots$$

حيث ان

$i=1,2,3,\cdots \quad a_1,b_i, \quad A_{MTM}, B_{MTM},\cdots$ ثوابت

وباستعمال الطريقة RMTM حصلنا على النتائج المدونه في الجدول (٢)

على الرغم من ان التكامل غير معروف القيمة التحليلية الا اننا نرى من خلال الجدول الخاص بالقاعدة RMTM ان القيمة نفسها ثابتة افقيا (لثلاثة اعمدة عندما n=256) لذا يمكن القول بان القيمة صحيحة على الاقل لاحدى عشرة مرتبة عشرية(1.94964355464) وهنا تكمن فائدة هذه الطريقه بايجاد قيم تقريبيه لهذ ا النوع من التكاملات

٣-

$$\int_{-1}^0\int_0^1\int_{-1}^0 (x.y.z(x^2+y^2-z\wedge 2-z)^{1/2})dxdydz$$

ذات مكامل مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطتين $(x,y,z)=(0,0,-1)$ و $(x,y,z)=(0,0,0)$ ونوع الاعتلال جذري والقيمة التحليلية لهذا التكامل هي 0.132598984165 مقربة لاثني عشرة مرتبة عشرية وعند تطبيق المبرهنة اعلاه وجدت ان حدود التصحيح هي

$$E_{MTM}(h)=a_1h^2+A_{MTM}h^4+$$
$$b_1h^{5.5}+b_2h^6+B_{MTM}h^{6.5}+b_ih^{7.5}+\cdots$$

ومن تطبيق القاعدةMTM حصلت على قيمة صحيحة لخمس مراتب عشرية بعد الفاصلة عندما يكون $m=n=n1=256$ مقارنة مع القيمة التحليلية للتكامل , ولكن بعد استخدام تعجيل رومبرك أي عند تطبيق طريقة RMTM بالاعتماد على حدود التصحيح هذه تحسنت النتيجة حيث حصلت على قيمة صحيحة لاحدى عشرة مرتبة عشرية بعد الفاصلة كما مبين بالجدول (٣) علما ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب 7.50ثانية بالرغم من وجود اعتلال في النقطتين

المناقشة

تناولت في هذا البحث حساب القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية او المعتلة في كلا حدي التكامل باستخدام قاعدتي ا لنقطة الوسطى على البعدين الداخلي والخارجيx,zوقاعدة شبه المنحرف على البعد الاوسطy عندما تكون الفترات الجزئية متساوية على كل الابعاد والتي يرمز لها بMTM . وعند استخدام تعجيل رومبرك يرمز لها RMTM .

نستنتج من خلال نتائج وجداول هذا البحث ان هذه الطريقة تعطي نتائج جيدة وبدقة عالية حيث ان هذه القاعدة اعطت نتائج صحيحة لخمس مراتب عشرية قياسا بالقيمة التحليلية وبعد استخدام تعجيل رومبرك حصلت على قيمة مقربة لاحدى عشرة مرتبة عشرية كما في المثال (3) وبوقت قصير كذلك عند استخدامها في المثالين الاول والثاني قداعطت قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) على الرغم من عدم معرفة القيمة الحقيقية للتكامل ،ففي التكامل الأول حصلت على قيمه تقريبيه مقربه لاثنتا عشرة مرتبة عشرية(0.607511819343) وذلك من خلال تطابق خمسة أعمده .

عندما $n=256$ كذلك التكامل الثاني حصلنا على قيمه تقريبيه لاحدى عشرة مرتبة عشرية(1.94964355464) وذلك من خلال تطابق ثلاثة اعمدة وهنا تكمن فائدة هذه الطريقه بايجاد قيم تقريبيه لهذ ا النوع من التكاملات , .ومن ملاحظة نتائج الامثلة المذكورة نستنتج ا ن الطريقة RMTM ذات دقة عالية وسرعة ممتازة ووقت قصير ويمكن الاعتماد عليها في حساب التكاملات الثلاثية.

n	mtm	2	2.5	3.5	4
1	0.611423746779				
2	0.607921116893	0.607168971840			
4	0.607551500689	0.607472130328	0.607501524070		
8	0.607515520691	0.607507794446	0.607511252379	0.607511702193	
16	0.607512157559	0.607511435369	0.607511788387	0.607511813171	0.607511815679
32	0.607511849890	0.607511783822	0.607511817607	0.607511818958	0.607511819089
64	0.607511822082	0.607511816111	0.607511819242	0.607511819317	0.607511819325
128	0.607511819588	0.607511819052	0.607511819337	0.607511819341	0.607511819342
256	0.607511819365	0.607511819317	0.607511819342	0.607511819343	0.607511819343

n	5.5	6	6.5
64	0.607511819329		
128	0.607511819342	0.607511819342	
256	0.607511819343	0.607511819343	0.607511819343

جدول (1)

N	MTM	K=1.5	K=2	K=2.5	K=3.5
1	1.93090365978				
2	1.94565057016	1.95371592327			
4	1.94888363912	1.95065186324	1.94963050990		
8	1.94950529730	1.94984529344	1.94957643684	1.94956482534	
16	1.94961884093	1.94968094000	1.94962615552	1.94963683198	1.94964381362
32	1.94963916708	1.94965028381	1.94964006508	1.94964305198	1.94964365507
64	1.94964277773	1.94964475247	1.94964290869	1.94964351931	1.94964356463
128	1.94964341721	1.94964376695	1.94964343845	1.94964355221	1.94964355540
256	1.94964353034	1.94964359221	1.94964353396	1.94964355447	1.94964355469

K=4	K=4.5	K=5.5	K=6
1.94964364450			
1.94964355860	1.94964355462		
1.94964355478	1.94964355461	1.94964355461	
1.94964355465	1.94964355464	1.94964355464	1.94964355464

جدول (٢)

n	mtm	k=2	k=4	k=5.5	k=6
1	0.153093108924				
2	0.137402620883	0.132172458203			
4	0.133790489537	0.132586445755	0.132614044925		
8	0.132896713997	0.132598788817	0.132599611688	0.132599285549	
16	0.132673431384	0.132599003846	0.132599018181	0.132599004770	0.132599000313
32	0.132617598574	0.132598987638	0.132598986557	0.132598985843	0.132598985542
64	0.132603638063	0.132598984559	0.132598984353	0.132598984304	0.132598984279
128	0.132600147668	0.132598984204	0.132598984180	0.132598984176	0.132598984174
256	0.132599275043	0.132598984168	0.132598984166	0.132598984165	0.132598984165

جدول(٣)

k=6.5	k=7.5	k=8	k=8.5
0.132598985377			
0.132598984265	0.132598984259		
0.132598984173	0.132598984172	0.132598984172	
0.132598984165	0.132598984165	0.132598984165	0.132598984165

المصادر

[1]Fox L.," Romberg Integration for aClass of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp. 87-9,1967

[2] Fox L. And Linda Hayes , " On the Definite Integration of Singular Integrands " SIAM REVIEW. ,12 , pp. 449-457 , 1970 .

[3] فرانك آيرز ، " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " ، دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين

[4] محمد ، علي حسن ، " إيجاد قيم تكاملات معتلة المكامل " رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى جامعة البصرة ، ١٩٨٤

[٥] الطائي ، علية شاني ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية معتلة " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،٢٠٠٥ .

[٦] ضياء ، عذراء محمد ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، ٢٠٠٩ .

[٧] عكار ، بتول حاتم ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " ، رسالة ماجستير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة 2010

[8] هلال، رنا حسن هلال ، " اشتقاق طرائق عددية مركبة من قاعدتي النقطة الوسطى وشبه المنحرف وصيغ أخطائها لحساب التكاملات الثلاثية المحددة عددياً وتحسين النتائج باستخدام طرائق تعجيلية" ، رسالة ماجستير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة

[9] عباس، محمد حمزه عباس ، " اشتقاق قواعد مركبة لحساب التكاملات الثنائية والثلاثية عدديا باستخدام قاعدة سمبسون عندما يكون اعتلال المكامل في غير احدى نهايتي منطقة التكامل وتحسين النتائج باستخدام طريقة رومبرك" ، رسالة ماجستير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة ٢٠١٤

[10] سلمان، محمد رزاق سلمان ، " اشتقاق قواعد مركبة لحساب التكاملات الثنائية والثلاثية عدديا باستخدام قاعدة النقطة الوسطى عندما يكون اعتلال المكامل في غير احدى نهايتي منطقة التكامل وتحسين النتائج باستخدام طريقة رومبرك" ، رسالة ماجستير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة ٢٠١٤

Derivation of Composition Formula for Evaluating Triple Integrals Numerically BY Using Trapezoidal rule and Midpoint and when the Singularity at both of End Integrals.

Rana Hassan helal abdolah

Department of Mathematics / Education college for Girls / University of Kufa

Abstract

The main aim of this paper to find values of the triple integration numerically which is improper (singular) of the partial derivatives or improper at both of of the integration .

Also in this paper, we find general formula of the errors according behaviour of the integrands using new approach is different from the previous approached by Mohammed [٤] , Alttai [٥] , Dayaa [٦] and others .

The $RMTM$ method is a composition method of using trapezoidal on the dimension of y and midpoint rule on the two dimensions interior x and exterior z with applying Romberg acceleration method when the number of subintervals of interval of interior integral are equal to the number of subintervals of exterior integral $\left(h=\bar{h}=\bar{\bar{h}}\right)$ such that $\bar{h}$ is the distances between coordinates of x and h is the distances between coordinates of y and $\bar{\bar{h}}$ is the distances between coordinates of z such that we can depend on it to calculate the triple integrations , and given higher accuracy in the results by few subintervals and time less than the request time for the researchers in the same subject .

.